

Exploración de la técnica de variaciones temporales del tránsito para la detección de planetas coorbitales

Máster Universitario en
Astronomía y Astrofísica

Curso académico
2016 - 2017

Alumno/a: Atienza Piedra,
José

D.N.I.: 76663499Z

E-mail:
joseatienzapiedra@gmail.com

Director de TFM: Dr. Jorge
Lillo-Box

Convocatoria:

Noviembre de 2017

Fecha de defensa:

Diciembre de 2017

Agradecimientos

A mi compañera, mi amiga, mi mujer, mi estrella, Ester. Aquella con la que formo el mejor equipo del mundo, un sistema binario perfectamente equilibrado. Jamás podré escribir un agradecimiento a la altura de lo mucho que me ha ayudado en la vida.

A mis padres, que no dudan en recorrer medio mundo por acercarse a mí y visitarme en mis aventuras, ellos que siempre están ahí, por largas que sean las distancias.

A mi hermana que es uno de mis mayores tesoros. Mi primera maestra y mi mejor amiga.

Al resto de mi familia, Sergio, mis tíos, mis primos y mi abuela. Que siempre responden con un sí a todo, y que en todo momento constituyen un enorme apoyo moral.

A Jorge Lillo-Box, una de esas personas que no te dejan indiferente. Por su profesionalidad, por su infinita paciencia a la hora de resolverme dudas y por su simpatía. Por haberme propuesto un reto personal como este y encargarse de hacer que mi estancia en Santiago de Chile fuera posible. Porque, aunque este es mi tercer título universitario, es el mejor director que he tenido.

Porque me gusta sentirme independiente y arquitecto de propia mi vida pero sin todos ellos, la realización de este Trabajo Fin de Máster, y del máster en sí mismo, hubiera sido completamente imposible.

A todos ellos, muchísimas gracias, de corazón.



Jorge Lillo-Box y yo, en una de las cúpulas del VLT, el 19 de Septiembre de 2017.

*Dedicado a la imaginación y la empatía,
las más grandes virtudes humanas.*

Índice

Agradecimientos	2
Índice	4
Resumen	5
1.- Introducción	6
1.1 Exoplanetas: historia y métodos de detección	6
1.2 Troyanos y métodos de detección	12
1.3 El proyecto TROY	15
1.3.1 Detección de troyanos combinando el método del tránsito con RV	15
1.3.3 Detección de troyanos por el método TTV	17
1.4 Objetivos, metodología y planificación	18
2.- Selección de candidatos	20
2.1 Criterios de selección	20
2.2 Sistemas planetarios con un planeta: los distintos escenarios	20
2.3 Sistemas planetarios con dos planetas: los distintos escenarios	22
3.- Estudio teórico	26
3.1 Fundamento teórico de cálculo de las TTVs	26
3.2 Descripción de las ecuaciones de movimiento orbital de un planeta en presencia de un objeto coorbital	27
3.3 Resolución de las ecuaciones y determinación de las TTVs	29
3.4 Estudio de la influencia de los diferentes parámetros sobre las TTVs	32
4.- Aplicación del estudio teórico a los candidatos	40
4.2 Aplicación del estudio teórico a las TTVs de los planetas seleccionados	49
4.2.1 Estudio de los planetas en los que todos sus parámetros son conocidos. ..	49
4.2.2 Estudio de los planetas en los que se desconoce la masa planetaria.	51
4.2.3 Estudio de los planetas en los que se desconocen las masas del planeta y de la estrella.	55
5.- Conclusiones y trabajo futuro	57
5.1 Conclusiones	57
5.2 Trabajos Futuros	58
6.- Referencias bibliográficas	59
Anexo I: Representación gráfica de TTVs del grupo 2cd	63
Anexo II: Códigos del repositorio TTTV_Tools	73
Anexo III: Curvas de fase y ajuste del modelo	75

Resumen

Hasta la fecha, un gran número de exoplanetas han sido detectados fundamentalmente gracias a técnicas como el tránsito o las velocidades radiales. La vasta diversidad en sus propiedades ha demostrado la existencia un auténtico zoológico exoplanetario. Estudiar más a fondo estos planetas utilizando diferentes técnicas ha permitido obtener información adicional de estos planetas y de los sistemas planetarios en los que se encuentran. El presente Trabajo Fin de Máster se ha realizado en el contexto del proyecto TROY, el cual pretende detectar los primeros exotroyanos, es decir, planetas coorbitales que describen su movimiento orbital con el mismo periodo alrededor de su estrella, pudiendo encontrarse en diferentes configuraciones orbitales como las denominadas *tadpole* o *horseshoe*.

En este Trabajo Fin de Máster se explora la posibilidad de utilizar el método de detección de planetas TTV (del inglés *Transit Time Variations*) para la detección de exotroyanos. Para ello, se ha realizado una revisión bibliográfica tanto a los aspectos teóricos y los fundamentos de esta técnica. De igual modo, se ha llevado a cabo la búsqueda de datos de sistemas planetarios particulares con el fin de estudiar si sus TTVs son compatibles con las que provocaría un compañero coorbital.

1.- Introducción

1.1 Exoplanetas: historia y métodos de detección

A mediados de los años 90 se comenzaron a detectar los primeros cuerpos orbitando estrellas distintas al Sol (Mayor & Queloz, 1995). La detección de estos exoplanetas es de gran interés en diferentes campos de la Astrofísica, como la formación estelar y planetaria o el estudio de discos de gas y polvo, como en un mayor abanico de disciplinas como la Biología o la Geología. Estudiar otros sistemas planetarios es fundamental para entender la diversidad de ambientes en los que se pueden formar planetas así como para comprender los entornos en los que se puede desarrollar la vida. Y, cómo no, para entender mejor nuestro propio sistema planetario, el Sistema Solar.

Gracias a métodos de detección como el método de los tránsitos o el método de velocidades radiales, que serán explicados más adelante, se han venido descubriendo cada vez más exoplanetas, motivando el desarrollo de proyectos y observatorios dedicados exclusivamente a la búsqueda de estos, como por ejemplo el proyecto *SuperWASP* (Street et al., 2003) o la misión espacial *Kepler* (Borucki et al., 2010).

El surgimiento de estos proyectos astronómicos a gran escala ha permitido el descubrimiento masivo de nuevos mundos, especialmente en los últimos siete años, tal y como se puede apreciar en la Figura 1.1.

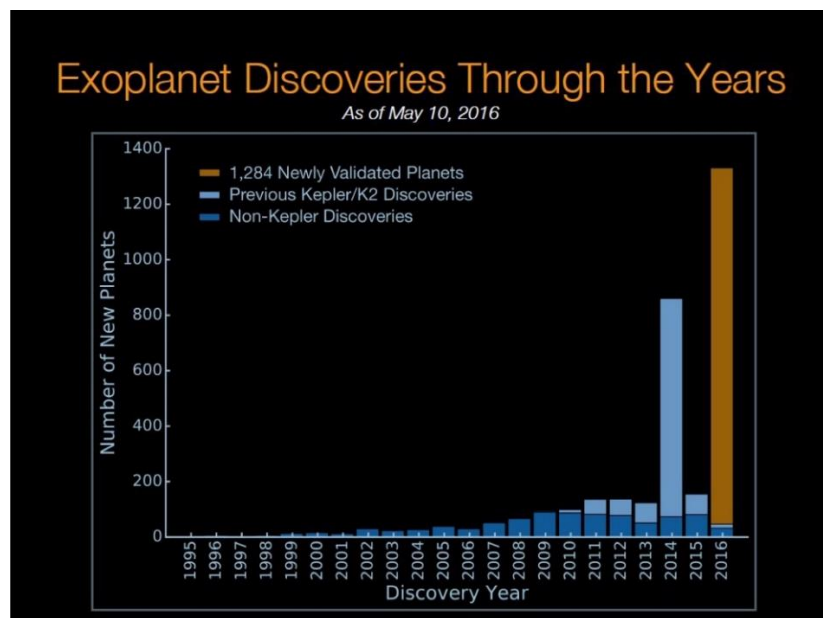


Figura 1.1 Histograma con el número de exoplanetas descubiertos cada año (Tricia Talbert, 2016).

Aunque existen alrededor de una decena de métodos de detección de exoplanetas, la mayor parte de estos objetos se han descubierto mediante los anteriormente mencionados métodos de las velocidades radiales y del tránsito.

En un escenario típico, la masa de una estrella que hospede uno o varios planetas es varios órdenes de magnitud mayor a la masa de estos. Sin embargo, la perturbación gravitacional originada por la masa de un planeta es suficiente para provocar que la estrella se desplace de su posición central a medida que el planeta se traslada en su órbita.

Un observador situado fuera de ese sistema planetario, que visualice el plano orbital con una inclinación distinta a 0° , puede percibir cómo la velocidad radial de la estrella aumenta y disminuye conforme el planeta se desplaza por su órbita. Dicha velocidad puede ser medida mediante un espectrógrafo. El método de las velocidades radiales, RV (del inglés *Radial Velocity*), aprovecha el desplazamiento al rojo que se observa en el espectro de una estrella cuando se aleja y el desplazamiento al azul que aparece cuando la estrella se acerca al observador para detectar la presencia de un planeta orbitando dicha estrella.

En el caso ideal con una órbita circular, la velocidad radial variaría siguiendo una senoide. Sin embargo, factores como la excentricidad de la órbita deforman dicha expresión, véase el caso de Kepler-432b reflejado en la Figura 1.2.

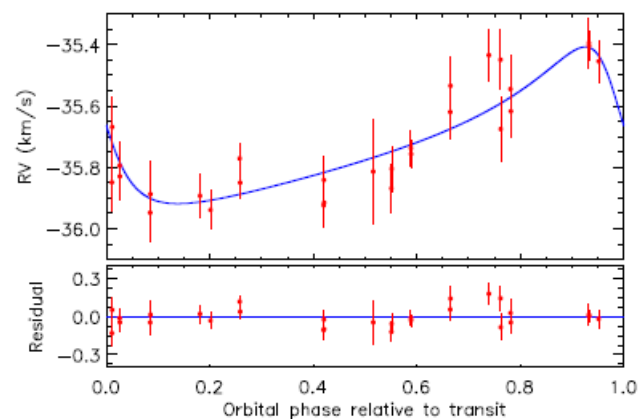


Figura 1.2 Velocidad radial de Kepler432 debida a interacciones gravitacionales con Kepler432-b (Ciceri et al., 2006).

Usando el método RV se pueden conocer diferentes parámetros orbitales e inferir otros parámetros físicos como la masa. Adicionalmente, existen otros métodos de detección como el del tránsito que también permiten detectar exoplanetas e inferir parámetros físicos como su diámetro.

Un observador que pueda medir el brillo de una estrella, podrá comprobar cómo este decae cuando un planeta hospedado en órbita alrededor de la misma, la eclipsa parcialmente al interponerse entre la estrella y el observador.

En la Figura 1.3 se puede apreciar cómo disminuye el brillo de la estrella conforme uno o varios planetas transitan entre la estrella y el observador, eclipsándola parcialmente.

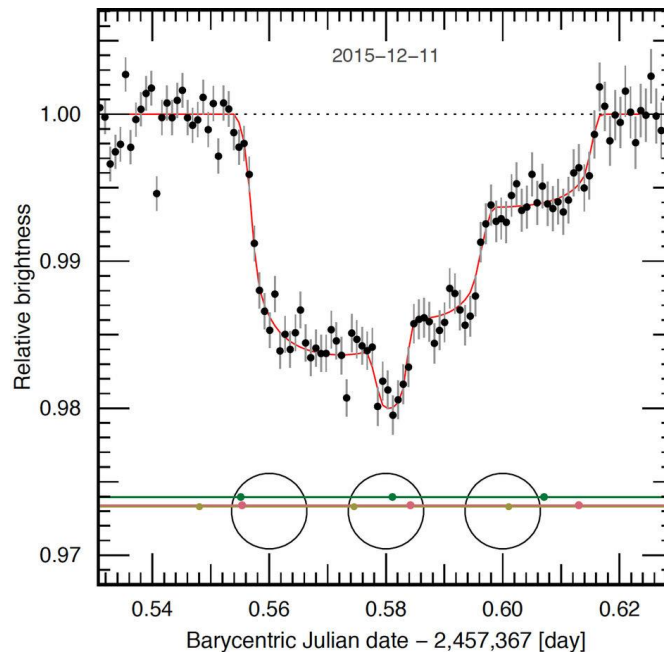


Figura 1.3 Variación del brillo relativo de una estrella durante un tránsito múltiple en el sistema planetario TRAPPIST-1 (Gillon et al., 2017).

Si bien el método de las velocidades radiales requiere que la observación se realice desde un lugar en el que la inclinación del plano orbital se aleje de los 0° , con el método del tránsito sucede algo parecido ya que si el planeta no eclipsa la estrella, no puede ser detectado por este método. El hecho de que un planeta transite o no, queda determinado por el parámetro de impacto b que se describe en la ecuación 1.1.

$$b \approx \frac{a}{R_s} \cdot \cos(i) \tag{1.1}$$

Donde:

- b es el parámetro de impacto
- a es el semieje mayor
- R_s es el radio estelar
- i es la inclinación del plano orbital respecto al observador

Para que un planeta transite b debe ser menor que 1, por lo que cuanto más cercana sea la inclinación a los 90° más probable es que el planeta transite. Lo mismo sucede cuanto menor sea la relación a/R_s , por lo que son más difíciles de detectar los planetas situados en órbitas lejanas a su estrella.

Además del ángulo de observación, los métodos de las velocidades radiales y del tránsito presentan limitaciones instrumentales. El método de las velocidades radiales precisa de medir velocidades del orden de los centímetros por segundo para detectar planetas como la Tierra orbitando estrellas como el Sol, para lo que se requiere el uso de espectrógrafos de alta resolución. Por su parte, el método del tránsito tal y como se puede apreciar en la Figura 1.3, presenta la limitación de que el brillo de la estrella varía apenas un 2% cuando los tres planetas eclipsan parcialmente la estrella. Esta variación es similar a la producida por un planeta gigante, y muy inferior para tránsitos de un solo planeta rocoso (Xie, 2014), por lo que se requiere el uso de una fotometría de alta precisión para detectar planetas mediante el método del tránsito.

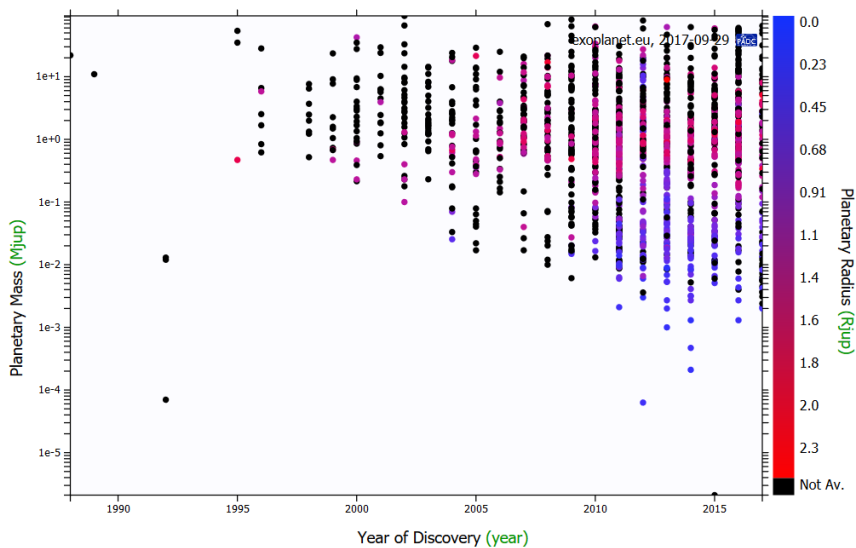


Figura 1.4 Año de descubrimiento de exoplanetas respecto su masa y radio¹.

Estas limitaciones instrumentales han provocado que exista, durante estas dos últimas décadas de búsqueda de exoplanetas, cierto sesgo observacional que permitía detectar mayoritariamente a planetas gigantes. Debido a su gran masa, los gigantes gaseosos inducen velocidades radiales mayores que los planetas rocosos, y debido a su gran tamaño, provocan eclipses más notables que los provocados por un planeta análogo terrestre.

¹ Nasa Exoplanet Archive: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>

Dicho sesgo observacional se puede ver representado si se toman las masas y los radios de los planetas y se representan en función del año de descubrimiento, tal y como se refleja en la Figura 1.4. Sin embargo, a medida que pasan los años, más planetas de baja masa y radio pequeño comienzan a ser descubiertos gracias a los avances instrumentales.

El método de detección de la variación de tiempo de tránsito, de aquí en adelante TTV por sus siglas en inglés *Transit-Timing Variation*, no se basa en las interacciones del planeta con su estrella sino en las interacciones del planeta con otros planetas, u otros componentes, de ese mismo sistema.

Suponiendo un sistema planetario con un solo planeta, si se observa la periodicidad con la que ocurren los tránsitos se podrá comprobar que esta es siempre la misma. Esto ocurre porque el periodo de un cuerpo orbitando a otro es estrictamente constante en ausencia de otras componentes (Steffen et al., 2007), y por tanto el planeta siempre tarda el mismo tiempo en pasar entre la estrella y el observador. Sin embargo si una estrella alberga varios planetas, la interacción gravitacional mutua entre ellos causará que sus orbitas se desvíen de lo que, en el caso de un solo planeta, era una simple órbita kepleriana provocando que los tiempos de tránsito ya nos sean estrictamente periódicos (Steffen et al., 2007).

De esta forma, si se observa el tiempo de tránsito de un planeta que se creía solo y se identifican TTVs, se puede inferir la presencia de otro planeta. Por tanto, el método de detección TTV permite detectar planetas a través de sus interacciones con planetas ya descubiertos incluso si estos nuevos candidatos no transitan la estrella o no tienen masa suficiente como para perturbar significativamente la posición de su estrella pero sí la de un planeta vecino, aumentando las posibilidades de detección de planetas de menor masa. Esta técnica se utiliza activamente para la detección de planetas que no transitan además de utilizarse también para determinar parámetros físicos de los planetas como su masa (Steffen et al., 2007).

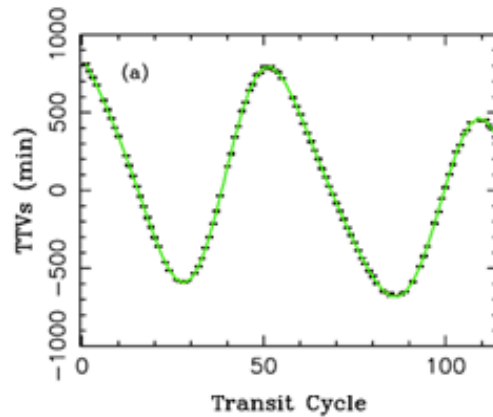


Figura 1.5 TTVs de Kepler-88b (Nesvorný et al., 2013).

Un ejemplo de detección de un exoplaneta mediante el método TTV es el de Kepler-88c, a partir de la observación de Kepler-88b tal y como se puede apreciar en la Figura 1.5, posteriormente confirmado mediante el método de las velocidades radiales.

En algunos casos en los que se tengan sistemas planetarios con dos exoplanetas en los que ambos transitan a su estrella, se pueden obtener las TTVs de ambos, como en el caso del sistema planetario Kepler-396 (o KOI 2672) en el que las TTVs de sus dos planetas están anticorrelacionadas, véase la Figura 1.6.

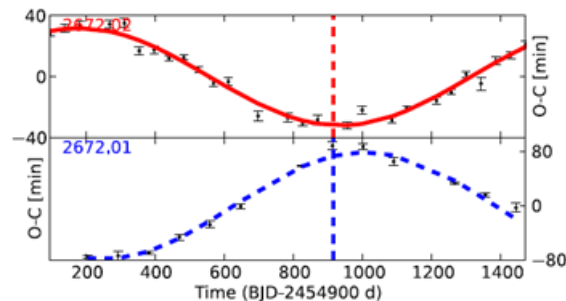


Figura 1.6 Las TTVs de Kepler-396b y Kepler-396c están anticorrelacionadas (Xie, 2014).

En un sistema planetario conformado por dos planetas cuyas TTVs están anticorrelacionadas, las TTVs de uno de los planetas estarán producidas con toda probabilidad por interacciones gravitacionales con el otro planeta y viceversa. En otras palabras, están provocadas por la interacción gravitacional recíproca de los dos planetas.

1.2 Troyanos y métodos de detección

En un sistema orbital formado por dos cuerpos, que orbitan alrededor del centro de masas, aparecen cinco puntos de estabilidad, conocidos como puntos de Lagrange (Euler, 1767), (Lagrange, 1772). Estos puntos se pueden resolver a partir del problema de los tres cuerpos y su importancia radica en que representan pozos y picos de potencial de forma que un objeto de masa despreciable podría permanecer estable en estos puntos de forma indefinida. De estos cinco puntos, dos son de equilibrio estable, L4 y L5 que son regiones de cierta extensión en las que el campo gravitatorio se deforma como pozo de potencial, aumentando la estabilidad a largo plazo y por tanto la posibilidad de mantener huéspedes (troyanos) de forma indefinida.

Se llaman troyanos a aquellos cuerpos que se encuentran en los puntos L4 y L5 de un sistema orbital, generalmente estrella-planeta.

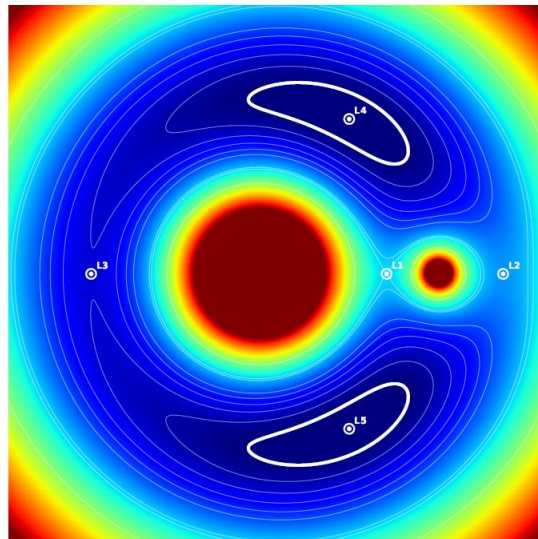


Figura 1.7 Puntos L en un sistema orbital. (J. Lillo-Box, comunicación privada).

Existen multitud de ejemplos de troyanos en el Sistema Solar (Dotto, 2008), como por ejemplo 2010 K7, un troyano de la Tierra que se encuentra en una órbita comúnmente denominada *tadpole* en torno a L4 (Connors, 2011). Los cuerpos que se encuentran en este tipo de configuración orbital, de forma general, no se encuentran estáticos en el punto de Lagrange sino que se encuentran efectuando el llamado movimiento de libración, es decir se mantienen orbitando dicho pozo de potencial.

Otros ejemplos de troyanos son los que se encuentran en los puntos de Lagrange de Marte y Neptuno. Sin embargo el ejemplo más conocido por la abundancia de estos objetos es el de Júpiter (Yoshida & Terai, 2017) representados en la Figura 1.8.

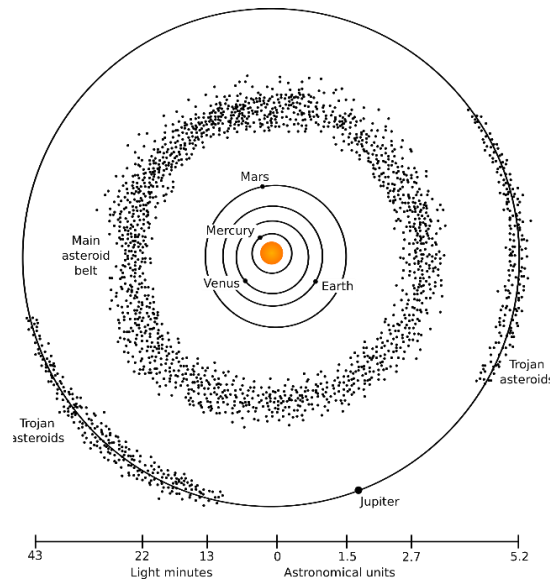


Figura 1.8 Troyanos del sistema Sol-Júpiter².

En los puntos L4 y L5 del sistema Sol-Júpiter permanecen confinados más de 4000 objetos conocidos en cada región (y se estima que hay del orden de 10^5 objetos en total), siendo el mayor de ellos 624 Hektor con un radio equivalente de 125 Km y que incluso posee su propia luna (Marchis, 2014).

Existen otras configuraciones en las que se pueden encontrar troyanos a parte de la configuración *tadpole*. Por ejemplo si la amplitud de libración del troyano es lo suficientemente grande, dicho cuerpo podría moverse siguiendo una trayectoria de herradura, en inglés *horseshoe*, como en el caso de las lunas de Saturno Epimetheus y Janus.

La formación y modos de migración de los troyanos es un campo de estudio que queda fuera de los objetivos de este Trabajo Fin de Máster. Sin embargo, es remarcable mencionar que los modelos actuales de formación in situ son compatibles con la formación de objetos de hasta 20 veces la masa de la Tierra (Vokrouhlický & Nesvorný, 2014) en la región *tadpole* de un planeta como Júpiter. La teoría permite que estos objetos permanezcan estables en estas órbitas durante la mayor parte de su vida. La única restricción teórica que existe para la estabilidad de estos cuerpos es que la masa conjunta del planeta y el troyano ha de ser inferior a $1/27$ (~3.7%) veces la masa estelar (Gascheau, 1843). Este último dato es bastante sugerente, pues entre todos los planetas gigantes conocidos hasta ahora, fuera del Sistema Solar, podrían mantenerse ocultos algunos planetas similares a la Tierra o del tipo supertierra, con las implicaciones

² Planétologie: https://fr.wikibooks.org/wiki/Plan%C3%A9tologie/Le_syst%C3%A8me_solaire

que esto tiene en el estudio de los sistemas planetarios y en la búsqueda de exoplanetas como tal. Además de en la Astrobiología para aquellos planetas que se encuentran en la zona de habitabilidad.

Anteriormente se comentó que, como se puede apreciar en la Figura 1.4, se ha descubierto una gran cantidad de exoplanetas gigantes con radios del orden del radio de Júpiter, por lo que no sería de extrañar que hubiera, entre los sistemas planetarios descubiertos, algunos sistemas estrella-planeta compatibles con la presencia de troyanos, aunque hasta ahora este tipo de objetos no han sido detectados.

Es preciso recordar que hasta ahora, todos los troyanos conocidos en el Sistema Solar, son significativamente más pequeños que su planeta anfitrión por lo que la detección de troyanos por el método del tránsito podría estar sesgada por las limitaciones instrumentales, ya que cuanto más pequeño es el cuerpo que se pretende detectar, menor es la profundidad de su tránsito y por tanto más difícil es de diferenciar del ruido de fondo. Cabe comentar que debido a la libración del troyano las curvas de fase no mostrarían al cuerpo en el mismo lugar por lo que, de nuevo, se incrementa la dificultad de diferenciar el tránsito de uno de estos cuerpos del ruido.

En Hipke & Angerhausen (2015), los autores tomaron 3739 curvas de luz obtenidas a lo largo de cuatro años por la misión Kepler, combinándolas en fase de forma que se representaron como si se tratara de la curva de luz de una sola estrella, consiguiendo una relación señal ruido considerablemente mejor que si se hiciera con una sola estrella. Esta gráfica se puede observar en la Figura 1.9. Es fácil apreciar cómo, aparte del descenso de brillo debido al tránsito planetario, existe cierto descenso en las zonas correspondientes a los puntos de Lagrange L4 y L5.

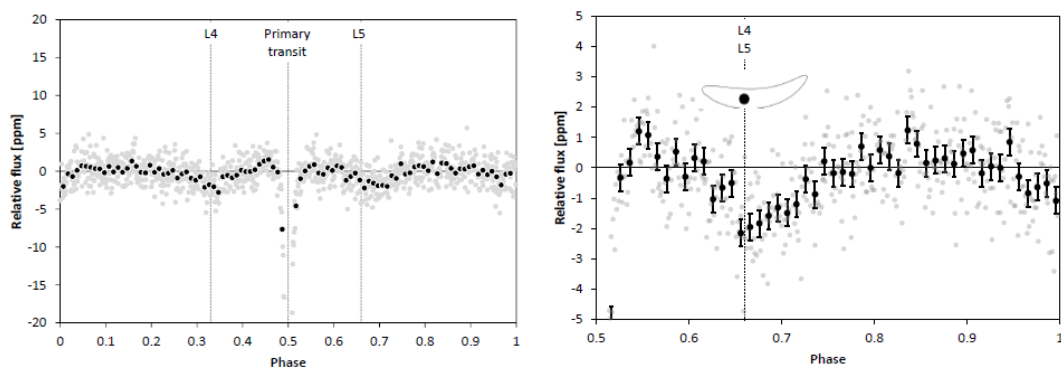


Figura 1.9 A la izquierda los datos apilados en fase, y a la derecha doblados en simetría (Hippke & Angerhausen, 2015).

Si bien la relación señal ruido tampoco es suficiente como para asegurar la presencia de troyanos, sí es lo suficientemente buena como para alentar la búsqueda individual

de este tipo de cuerpos y para asentar las bases de las técnicas necesarias para hacerlo pues se espera que con las misiones espaciales como *James Webb Space Telescope* o *Plato* se mejore considerablemente la cantidad de los datos relativos a observaciones de exoplanetas disponibles hasta la fecha (Hippke & Angerhausen, 2015).

1.3 El proyecto TROY

El proyecto TROY³ (Lillo-Box et al., 2017), liderado por Jorge Lillo-Box y formado por investigadores especializados en diferentes ramas de la exploración exoplanetaria, surge con el fin de estudiar la formación y evolución de los sistemas planetarios a partir de la detección y caracterización de los primeros planetas extrojanos.

Aunque el objetivo fundamental de este proyecto es la detección por primera vez de este tipo de cuerpos, también trata de responder a las preguntas de cómo y dónde se forman. Si bien en las inmediaciones del punto de Lagrange o por el contrario en otros lugares del sistema planetario, siendo posteriormente capturados en los pozos de potencial del planeta. En este segundo supuesto, se pretende además describir los procesos migratorios por los cuales estos cuerpos acaban quedando atrapados en dichos puntos. Por otro lado, el proyecto TROY tiene como objetivo determinar el valor máximo de la masa que puede ser acreetada en los puntos de Lagrange y el tamaño que pueden llegar a tener estos cuerpos, con el fin de responder a la pregunta de si verdaderamente pueden existir cuerpos del tamaño de un planeta coorbitando a con otros planetas (Lillo-Box et al., 2017).

Aunque en el marco de este proyecto de investigación se están explorando diferentes técnicas de detección, a continuación se van a detallar tan solo dos métodos: el método del tránsito combinado con el método de las velocidades radiales, que es el método más investigado hasta el momento por el proyecto TROY, y el método TTV que es del que se ocupa este Trabajo Fin de Máster.

1.3.1 Detección de trojanos combinando el método del tránsito con RV

Anteriormente se comentó que un planeta que orbita una estrella provoca que esta se mueva en mayor o menor medida de su posición central y esto puede ser medido por medio del método de las velocidades radiales. Para un solo planeta en una órbita circular, el tiempo del centro del tránsito coincide con el instante en el que la componente radial de la velocidad inducida por el planeta se hace nula. Sin embargo, si existe un compañero orbital en uno de los puntos de Lagrange, habrá un lapso de tiempo entre

³ The TROY Project: <http://www.sc.eso.org/~jlillobo/troy/index.html>

ambos instantes (Ford & Gaudi, 2006). Teniendo en cuenta esto, la combinación de los métodos de las velocidades radiales y del tránsito puede servir para inferir la presencia de un troyano. De esta forma se transforma el problema en una medida de tiempos, medir el tiempo entre el lapso temporal de tránsito y el tiempo en el que la componente radial de la velocidad de la estrella producida por la interacción gravitatoria con el planeta es nula.

Ford & Gaudi (2006) desarrollaron un método de detección de troyanos sin movimiento de libración en configuración *tadpole* coorbitando con planetas en órbitas circulares. Posteriormente, este método fue generalizado en Leleu et al. (2017) por los investigadores del proyecto TROY a troyanos que describieran cualquier amplitud de libración, desde una configuración *tadpole* con o sin libración a la *horseshoe*, hospedados en planetas con órbitas hasta primer orden en excentricidad.

Es preciso tener en cuenta que para casos en los que la excentricidad sea lo suficientemente grande, se puede inferir la presencia de un compañero coorbital utilizando tan solo el método de las velocidades radiales (Leleu et al., 2015), algo que es interesante si se tiene en cuenta que la combinación de los métodos de las velocidades radiales y de tránsito para la detección de compañeros coorbitales requiere datos de fotometría y espectroscopia.

El método generalizado por los investigadores del proyecto TROY establece un parámetro, α , que es cero para planetas que se encuentren solos en su órbita (A. Leleu et al., 2017). Por el contrario, si este parámetro difiere significativamente de cero, el planeta se convierte en un importante candidato a albergar un compañero coorbital. Cabe destacar que existen otras configuraciones que hacen que el parámetro α sea distinto de 0, como la excentricidad u otros planetas lejanos, aunque en cualquier caso es posible descartar estas posibilidades a través de observaciones adicionales.

En un estudio posterior publicado por el proyecto TROY (Lillo-Box et al., 2017), se aplicó este método a una muestra de 46 sistemas que hubieran sido detectados por el método del tránsito, que se encontraran en sistemas planetarios con tan solo ese planeta, y en los que las medidas de velocidades radiales fueran lo suficientemente precisas. En la Figura 1.10 se recoge el valor del parámetro α para los 46 planetas estudiados. Las barras de error ilustradas con línea continua muestran el intervalo de confianza del 68.7%, que equivale a 1σ . Las barras de error discontinuas muestran el intervalo de confianza del 99.7%, que equivale a 3σ . En azul se muestran los 9 sistemas cuyo parámetro α se alejan del valor nulo al menos 1σ .

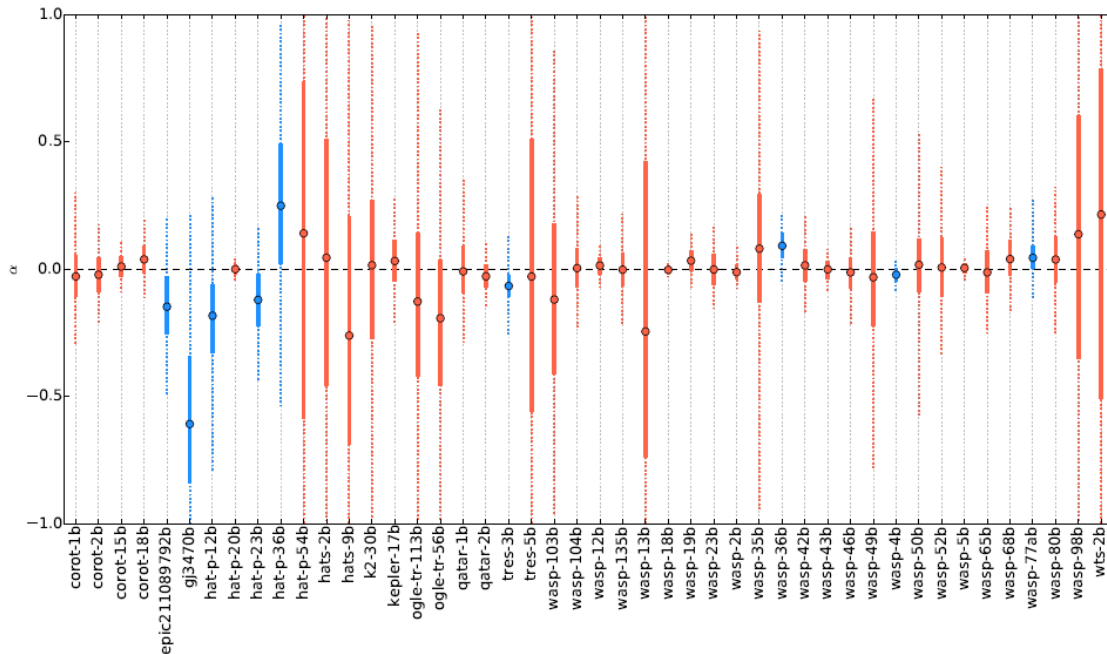


Figura 1.10 Planetas estudiados y el valor del parámetro α (Lillo-Box et al., 2017).

1.3.3 Detección de troyanos por el método TTV

Anteriormente se describió que en sistemas planetarios con dos planetas se puede producir una anticorrelación entre las TTVs de ambos. Esta anticorrelación sucede porque las interacciones gravitacionales de un planeta provocan las TTVs del otro y viceversa, es decir existe una perturbación gravitacional recíproca. Tal y como se puede observar, las formas de las TTVs, en algunos de estos casos, se aproximan muy bien a una expresión sinusoidal.

Sin embargo existen algunos exoplanetas en cuyos sistemas planetarios tan solo se ha detectado hasta la fecha un solo exoplaneta pero que presentan TTVs como por ejemplo el caso de WASP43b (Jiang et al., 2016). Una de las posibles explicaciones para estas TTVs en sistemas con un solo planeta sería la existencia de planetas, o compañeros estelares, en el sistema que aún no han sido detectados por otros métodos (Steffen et al., 2007). Sin embargo, otros escenarios como la existencia de un compañero coorbital librando alrededor de los puntos de Lagrange o satélites naturales del planeta (exolunas) también podrían inducir variaciones en los tiempos del tránsito del planeta (Kipping, 2009).

Además, cabe también cuestionarse si en todos los sistemas planetarios con dos planetas que presentan TTVs, éstas están perfectamente anticorrelacionadas ya que de lo contrario, podría existir cierta dinámica adicional provocada por algún compañero coorbital.

Las TTVs que induciría un troyano del tamaño de la Tierra sobre un planeta de entre 0.1 y 0.5 masas de Júpiter son comparables con las TTVs de algunos planetas descubiertos por la misión Kepler (Haghighipour et al., 2013), por lo que resulta interesante estudiar la dependencia de los parámetros que definen de estas TTVs, amplitud y periodo, respecto a los parámetros orbitales y la relación de masas de estrella, planeta y troyano, con el fin de establecer qué TTVs son compatibles con la presencia de un objeto coorbital.

Los objetivos del presente Trabajo de Fin de Máster se centrarán en el estudio de las TTVs generadas por un troyano coorbitando con un planeta en configuración tadpole en base a los parámetros orbitales y físicos del sistema, así como establecer las condiciones de compatibilidad de las TTVs con dicha configuración orbital.

1.4 Objetivos, metodología y planificación

Existen multitud de sistemas planetarios descubiertos actualmente en los cuales la presencia de troyanos podría haber pasado inadvertida. El presente Trabajo Fin de Máster tiene por objetivo principal la exploración del método de las TTVs para la detección de troyanos en sistemas planetarios conocidos siguiendo los siguientes objetivos específicos:

1. Estudiar bibliografía relativa a troyanos y el método TTV.
2. Elaborar una lista con sistemas planetarios candidatos
3. Realizar un estudio teórico de la dinámica de objetos coorbitales
4. Aplicación del estudio teórico a los candidatos
5. Elaboración de conclusiones y redacción de la memoria

La metodología a emplear para lograr cada uno de los objetivos anteriores se expone a continuación:

1. Leer y anotar las conclusiones más relevantes de la bibliografía aportada. Leer bibliografía adicional referenciada por esta bibliografía básica.
2. Seleccionar los sistemas planetarios de interés, en base a los criterios que se expondrán en el Capítulo 2 de la memoria, a partir de la base de datos *Nasa Exoplanet Archive*¹.
3. Estudiar la base teórica de la dinámica en sistemas con troyanos y determinar las TTVs teóricas en base a sus ecuaciones de movimiento, además de realizar tablas de dependencias entre parámetros y gráficas que permitan discutir el efecto de cada parámetro a la forma de las TTVs.

4. Estudiar las TTVs observadas en los sistemas candidatos con el fin de comprobar si su dinámica es compatible con el hecho de haber sido producidas por un troyano.
5. Redactar una memoria y elaborar conclusiones relevantes en base a los avances realizados y las cuestiones que surgen a lo largo del Trabajo Fin de Máster, así como plantear posibles trabajos futuros o líneas de investigación que continúen el trabajo expuesto en la memoria.

Con el fin de cumplir con los objetivos anteriormente expuestos y en base a la metodología descrita, se ha elaborado la Tabla 1.1 con una planificación que sirva de guía en el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster.

Semana	Tareas
Agosto	<ul style="list-style-type: none"> • Primera toma de contacto con la bibliografía básica y la web de Nasa Exoplanet Archive¹.
18-24 de Septiembre	<ul style="list-style-type: none"> • Elaboración formal de objetivos. • Resolver las dudas sobre la bibliografía con el tutor. • Comenzar el filtrado de planetas y la clasificación de los mismos según sus características.
25 de Septiembre - 1 de Octubre	<ul style="list-style-type: none"> • Continuar con la selección de candidatos. • Búsqueda de TTVs anticorrelacionadas • Redacción de la introducción de la memoria.
2-8 de Octubre	<ul style="list-style-type: none"> • Familiarización con las ecuaciones. • Programación de los algoritmos de representación TTVs y algoritmos de ajuste.
9-15 de Octubre	<ul style="list-style-type: none"> • Optimización de los algoritmos. • Redacción de la memoria de la selección de candidatos.
16-22 de Octubre	<ul style="list-style-type: none"> • Generación de gráficas y estudio de dependencias paramétricas. • Redacción de memoria de la parte del estudio teórico.
23-29 de Octubre	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación del estudio teórico a los candidatos
30 de octubre - 5 de Noviembre	<ul style="list-style-type: none"> • Aplicación del estudio teórico a los candidatos. • Redacción de la memoria de la aplicación del estudio teórico. • Redacción de conclusiones y trabajos futuros.
6-12 de Noviembre	<ul style="list-style-type: none"> • Corrección de la memoria en base a las indicaciones del tutor. • Preparación de la defensa.
13-19 de Noviembre	<ul style="list-style-type: none"> • Preparación de la documentación relativa al proceso de inscripción
20-26 de Noviembre	<ul style="list-style-type: none"> • Realizar la inscripción del Trabajo Fin de Máster.

Tabla 1.1 Planificación de este Trabajo Fin de Máster

2.- Selección de candidatos

2.1 Criterios de selección

La base de datos *Nasa Exoplanet Archive*¹, permite mostrar una tabla con todos los exoplanetas detectados hasta el momento y acceder de forma ordenada a datos físicos de los mismos como su masa, radio o método de detección, entre otros parámetros.

En este caso de estudio se han filtrado los planetas de la base de datos en función a los siguientes requisitos:

- Planetas confirmados. Con el fin de aplicar el estudio teórico a casos reales con la mayor validez posible, se han utilizado tan solo planetas confirmados o validados estadísticamente.
- Sistemas en los que se haya detectado TTVs. La base de datos *Nasa Exoplanet Archive*¹ dispone de un campo denominado *TTV Flag* que indica, con un valor binario, si se ha detectado TTVs en un planeta.
- Planetas que se encuentren en sistemas planetarios de uno o dos planetas. Los sistemas planetarios con tres o más planetas requieren un estudio más profundo y complejo de su dinámica, lo cual se escapa del objetivo fundamental de este Trabajo Fin de Máster.

A fecha elaboración de este Trabajo Fin de Máster, 3513 exoplanetas se encuentran catalogados en la base de datos mencionada como exoplanetas confirmados, de los cuales en tan solo 233 de ellos se habían detectado TTVs. Escogiendo tan solo los planetas contenidos en sistemas planetarios de uno y dos planetas, la muestra se reduce a 80 planetas, 9 en sistemas planetarios de un solo planeta y 71 en sistemas con dos planetas.

Estos primeros candidatos se agruparon en sus correspondientes sistemas, obteniendo un total de 55 sistemas, de los cuales 46 son sistemas con dos planetas. Es preciso remarcar que, tal como se verá a continuación, existen sistemas planetarios con dos planetas pero tan solo se ha detectado TTVs en uno de ellos.

2.2 Sistemas planetarios con un planeta: los distintos escenarios

Una vez filtrados los sistemas planetarios con un solo planeta (9) y que cumplían los requisitos anteriormente enumerados, se realizó un nuevo filtro atendiendo al criterio de qué tipo de estrella albergaba a estos planetas. Se encontró que cinco de los planetas se encontraban orbitando a sistemas estelares múltiples, otros a estrellas variables (3) y y tan solo uno a una estrella aislada sin variabilidad apreciable. A cada uno de estos

casos se les denominó 1a, 1b y 1c respectivamente. Un resumen ilustrativo de la cantidad de planetas en cada escenario se recoge en la Figura 2.1. Para determinar si una estrella tiene o no variabilidad apreciable se ha seguido como criterio la catalogación de *SIMBAD*⁴. Sin embargo, el hecho de que la estrella sea variable no es una condición relevante en el estudio a realizar por lo que los grupos b y c se han agrupado formando el conjunto 1bc que representa estrellas aisladas obteniendo la distribución.

Un factor más a tener en cuenta, para los casos del grupo 1a, es si se tratan de sistemas circumbinarios, es decir, si el planeta orbita las dos estrellas; ya que en ese caso la dinámica del sistema es más compleja y queda fuera de los objetivos de este Trabajo Fin de Máster.

De esta forma el grupo 1a_1 representa a los sistemas circumbinarios y el sistema 1a_2 a los sistemas en los que el planeta solo orbita a una de las dos estrellas (estos planetas se denominan tipo satélite).

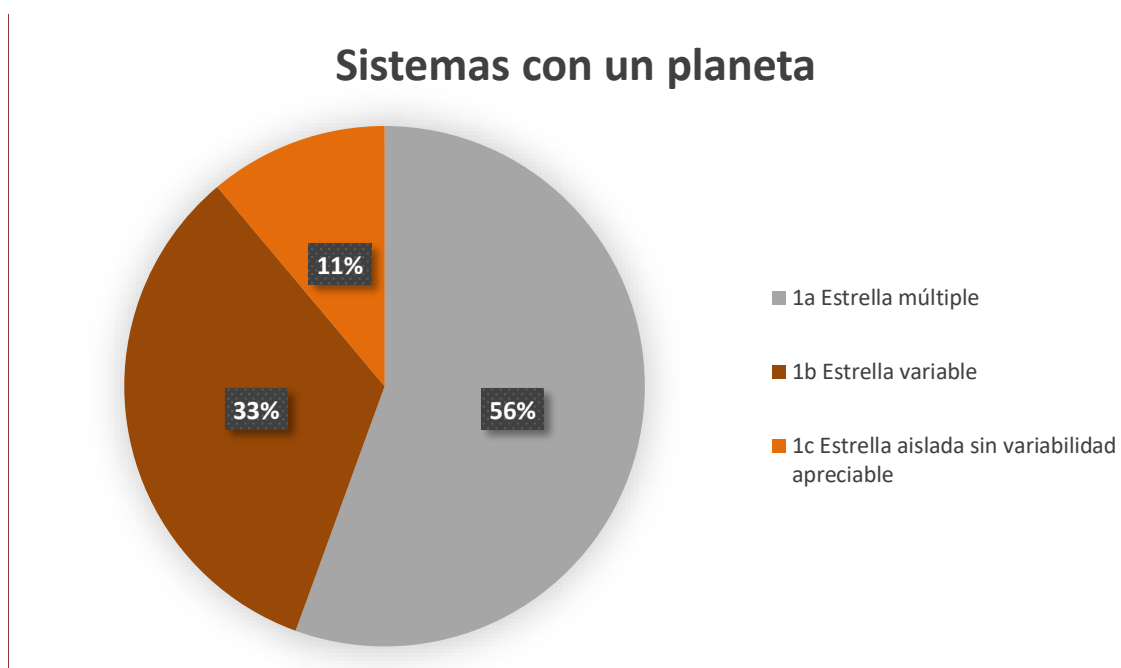


Figura 2.1 Diagrama ilustrativo del número de sistemas en cada tipo de estrella.

Teniendo esto en cuenta se han agrupado los distintos sistemas planetarios tal y como se muestra en la Tabla 2.1.

⁴ SIMBAD Astronomical Database: <http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>

Nombre del Sistema	Caso	Sistema a estudiar
Kepler-16	1a_1	No (Sistema circumbinario)
Kepler-34	1a_1	No (Sistema circumbinario)
Kepler-35	1a_1	No (Sistema circumbinario)
Kepler-13	1a_2	Sí
Kepler-410 A	1a_2	Sí
Kepler-71	1bc	Sí
Kepler-17	1bc	Sí
Kepler-412	1bc	Sí
WASP43	1bc	No (No presenta TTVs periódicas) (Hoyer et al., 2016)

Tabla 2.1 Resumen de sistemas planetarios con un planeta

En el Capítulo 3 se realiza el estudio teórico en el que se discute la posibilidad de interacción de las estrellas exteriores al sistema en para el grupo 1a_2 y si la dinámica de esta puede ser despreciada en estos casos y estudiarlos de forma similar a cómo se estudian los sistemas planetarios del grupo 1bc.

Cabe mencionar que se había seleccionado inicialmente a WASP43b ya que en un primer momento se pensó que presentaba TTVs que podrían ser debidas a cierta caída de la órbita de este planeta (Jiang et al., 2016), teoría que fue posteriormente refutada, pero que en cualquier caso no se encontraron TTVs periódicas (Hoyer et al., 2016).

2.3 Sistemas planetarios con dos planetas: los distintos escenarios

En estos sistemas planetarios se realizó el filtro de igual modo que en los sistemas con un solo planeta, atendiendo al tipo de estrella que los hospedaba. Sin embargo, al contar con dos planetas, se dieron casos adicionales como aquellos en los que tan solo uno de los planetas tenía TTVs. De esta forma surgen 7 grupos distintos en función del tipo de estrella y si las TTVs se habían detectado en uno o en los dos planetas. La Figura 2.2 ilustra los distintos subgrupos.

Al igual que sucedía en los sistemas planetarios con tan solo un planeta, se han agrupado los sistemas planetarios independientemente de si su estrella huésped es variable o no ya que esto no afecta a la dinámica del sistema. De esta forma se diferencian los grupos 2ab, que son aquellos en los que solo un planeta tiene TTVs, y 2cd, que son aquellos en los que ambos planetas presentan TTVs.

Sistemas con dos planetas

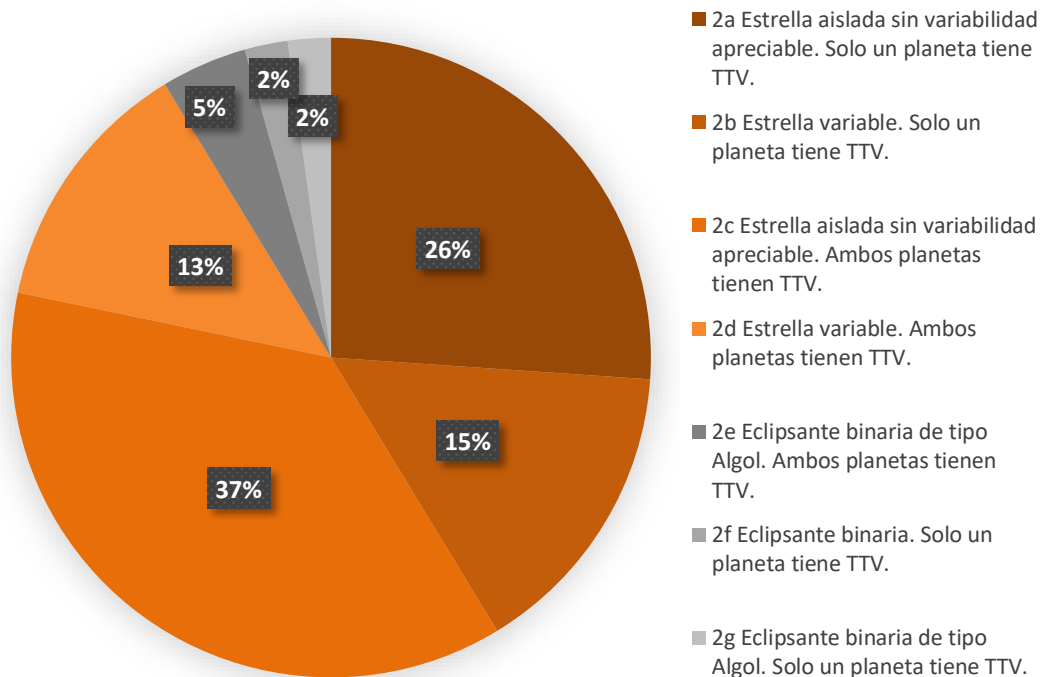


Figura 2.2 Distintos escenarios para sistemas con dos planetas.

Por otro lado, se tienen los grupos 2e, 2f y 2g (en total 4 sistemas) que al tratarse de sistemas estelares múltiples y dado que se está trabajando con sistemas multiplanetarios, serán descartados dada la complejidad dinámica que presentan.

Teniendo en cuenta esta agrupación se establece, finalmente, los grupos reflejados en la Figura 2.3.

A priori todos los sistemas planetarios de los grupos 2ab y 2cd (19 y 23 sistemas respectivamente) deberían ser estudiados. Sin embargo, tal y como se comenta en el Capítulo 1, existen algunos sistemas del grupo 2cd en los que sus TTVs se encuentran perfectamente anticorrelacionadas por lo que el origen de estas TTVs se explica perfectamente como una consecuencia de la interacción gravitacional recíproca entre estos planetas. Esto quedaba reflejado en la Figura 1.6 con el ejemplo de Kepler-396. Teniendo esto en cuenta se han agrupado los distintos sistemas planetarios tal y como se muestra en la Tabla 2.2, en la que se especifican en las columnas “b TTVs” y “c TTVs” respectivamente qué planeta presenta TTVs.

Sistemas con dos planetas

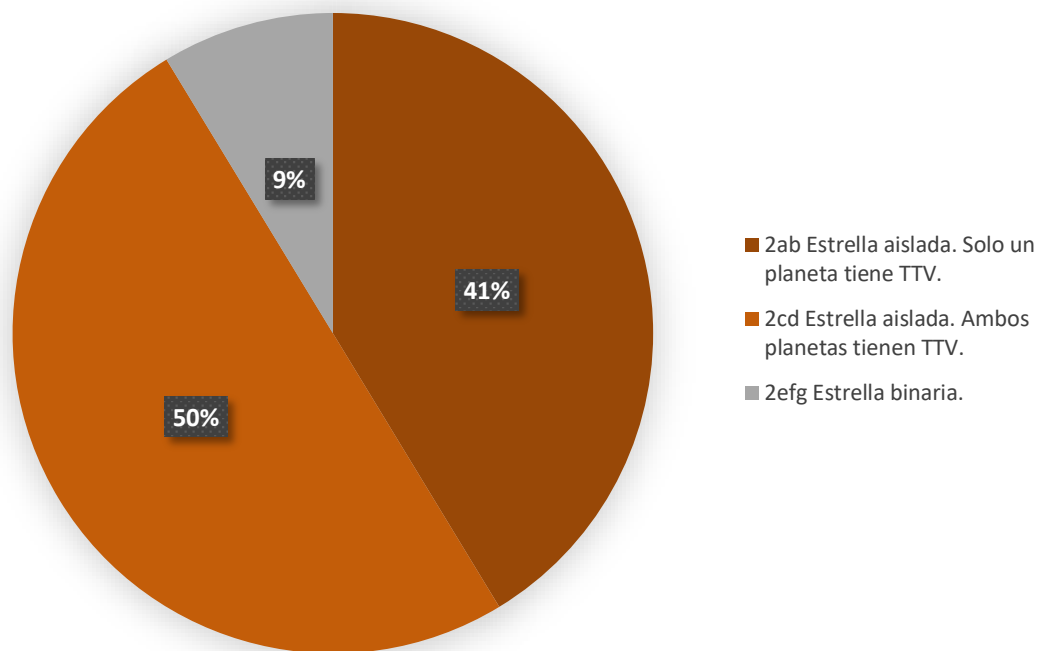


Figura 2.3 Escenarios de interés para sistemas con dos planetas.

En este sentido, es preciso comentar el caso de HAT-P-13b, cuyas TTVs están debidas a la presencia de HAT-P-13c, algo que ha sido confirmado por velocidad radial (Payne & Ford, 2011). Sin embargo no se han detectado TTVs en HAT-P-13c debido a una falta de datos dado su largo periodo.

En el Anexo I a esta memoria, se recogen las figuras que representan las TTVs de cada sistema planetario del grupo 2cd.

Nombre del Sistema	b TTVs	c TTVs	Caso	Sistemas a Estudiar
HAT-P-13	Sí	No	2ab	No (TTVs debidas a HAT-P-13c)
Kepler-10	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-108	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-136	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-139	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-160	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-230	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-309	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-315	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-397	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-405	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-87	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-88	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-161	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-195	Sí	No	2ab	Sí
Kepler-209	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-210	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-231	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-312	No	Sí	2ab	Sí
Kepler-103	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-111	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-128	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-145	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-177	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-277	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-278	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-29	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-297	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-328	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-36	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-414	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-415	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-416	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-417	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-50	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-59	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-159	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-199	Sí	Sí	2cd	Sí
Kepler-27	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-28	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-396	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-57	Sí	Sí	2cd	No (TTVs anticorrelacionadas)
Kepler-307	Sí	Sí	2e	No (Estrella binaria)
Kepler-47	Sí	Sí	2e	No (Estrella binaria)
Kepler-324	No	Sí	2f	No (Estrella binaria)
Kepler-419	Sí	No	2g	No (Estrella binaria)

Tabla 2.2 Resumen de sistemas planetarios con dos planetas

3.- Estudio teórico

En el presente capítulo se analizan las TTVs teóricas de un planeta inducidas por la presencia de un planeta coorbital, a través de las ecuaciones que describen el movimiento de un planeta en tres dimensiones y la influencia del troyano sobre dicho movimiento.

3.1 Fundamento teórico de cálculo de las TTVs

Un planeta cuyo periodo orbital sea constante, es decir, que no presente TTVs, realizará una órbita siempre en el mismo lapso de tiempo. Es decir, la diferencia de tiempo entre un tránsito y el siguiente es siempre la misma.

Con el fin de calcular el periodo orbital medio de un planeta que presenta TTVs, se puede realizar un promedio de los periodos observados, o aplicar técnicas más avanzadas como la transformada de Fourier. Teniendo esto en cuenta, si se toman los tiempos de tránsito observados para cada órbita i , y se les resta i multiplicado por el periodo orbital medio calculado, se obtienen las variaciones en el tiempo de tránsito, es decir, las TTVs, que normalmente se denota como O-C (del inglés *Observed - Calculated*). A continuación se muestra un ejemplo:

Tiempos de tránsito observado (TTO):

$$TTO = [0, 101, 205, 308, 411, 505, 598, 701, 798, 902] \quad (3.1)$$

Periodo medio calculado (PMC):

$$PMC = \frac{\sum_{i=1}^n TTO_{i+1} - TTO_i}{n - 1} = 100.22 \quad (3.2)$$

$$TTO - PMC = O - C = TTO_{i+1} - TTC \cdot i$$

$$O - C = [0, 0.78, 4.56, 7.33, 10.11, 3.89, -3.33, -0.56, -3.78, 0] \quad (3.3)$$

Si se representa gráficamente O-C en función del número de órbita o del tiempo, es decir las TTVs, para cada órbita se obtiene una gráfica similar a las ya mostradas a lo largo de esta memoria, como por ejemplo en la Figura 1.6.

3.2 Descripción de las ecuaciones de movimiento orbital de un planeta en presencia de un objeto coorbital

En la Figura 3.1 se muestra el sistema de referencia y los parámetros para la órbita de un planeta respecto a al plano del cielo Oxyz, donde O es el centro de la estrella y z la línea de visión.

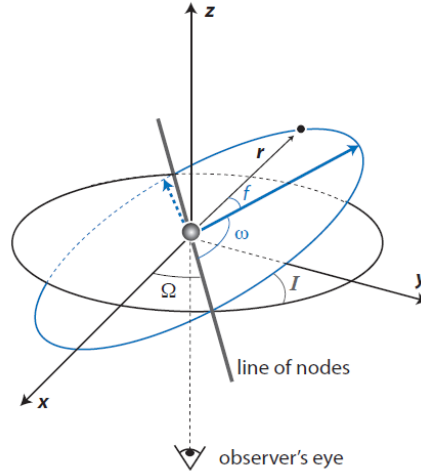


Figura 3.1 Sistema de referencia para la órbita de un planeta (A. Leleu et al., 2017).

Partiendo de este sistema de referencia, el movimiento de un planeta por la dirección del eje Y, se puede describir por la ecuación 3.4 (A. Leleu et al., 2017).

$$\begin{aligned}
 Y = & -a \sin[J_1] \sin[\Phi_{obs}] \sin[\lambda_{1,0} - \Omega_{1,0} - g_2 t + nt + \delta\zeta - \delta\zeta(0)] - \\
 & -a \cos[\Phi_{obs}] (\cos[\lambda_{1,0} - \Omega_{1,0} - g_2 t + nt + \delta\zeta - \delta\zeta(0)] + \\
 & + \cos[J_1] \cos[\Omega_{1,0} + g_2 t] \sin[\lambda_{1,0} - \Omega_{1,0} - g_2 t + nt + \delta\zeta - \delta\zeta(0)])
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Y el movimiento a lo largo de la línea de visión, el eje Z, mediante la ecuación 3.5 (A. Leleu et al., 2017).

$$\begin{aligned}
 Z = & a(\cos[\lambda_{1,0} - \Omega_{1,0} - g_2 t + nt + \delta\zeta - \delta\zeta(0)] \sin[\Phi_{obs}] \sin[\Omega_{1,0} + g_2 t] + \\
 & + (\cos[\Phi_{obs}] \sin[J_1] + \cos[J_1] \cos[\Omega_{1,0} + g_2 t] \sin[\Phi_{obs}]) \\
 & \sin[\lambda_{1,0} - \Omega_{1,0} - g_2 t + nt + \delta\zeta - \delta\zeta(0)])
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

dónde:

- a es el semieje mayor.
- J_1 es la inclinación de la órbita del planeta respecto al plano invariante. El plano invariante de un sistema solar se define como el plano que pasa por su baricentro perpendicular al vector de su momento angular.
- Φ_{obs} es el ángulo entre el plano invariante y el plano del cielo.
- $\lambda_{1,0}$ es la fase de la órbita del planeta en $t - T_o = 0$.
- $\Omega_{1,0}$ es el argumento de la línea de nodos del planeta.
- g_2 es la frecuencia de precesión de la órbita del troyano.
- t representa el tiempo desde el tránsito del planeta.
- n es la velocidad angular. La ecuación 3.6 la relaciona con el periodo orbital, T .

$$n = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (3.6)$$

- δ es la relación de masas entre el troyano, m_2 , y la masa del planeta, m_1 .

$$\delta = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.7)$$

- ζ es la posición angular del troyano respecto la posición del planeta (Leleu et Al, 2017).

$$\zeta_{L_4}(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8}z^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}z\right)z \cos[\nu \cdot t - \Phi] - \frac{\sqrt{3}}{8}z^2 \cos[2\nu t - 2\Phi] \quad (3.8)$$

En el caso del punto de Lagrange L_5 , la ecuación cambia de signo.

$$\zeta_{L_5}(t) = -\zeta_{L_4}(t) \quad (3.9)$$

Donde en la ecuación 3.8 tenemos:

- z es la amplitud de libración del troyano.
- ν es la frecuencia de libración y se relaciona con la velocidad angular, la masa del planeta, m_1 , la masa del troyano, m_2 , y la masa de la estrella, m_0 .

$$\nu_{L_4} = n \cdot \sqrt{\frac{27}{4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2}} \quad (3.10)$$

- Φ es la fase inicial del movimiento de libración del troyano.
- $\zeta(0)$ es la posición angular del troyano para $t = 0$.

$$\zeta_{L_4}(0) = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot z^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot z\right) \cdot z \cdot \cos[-\Phi] - \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot z^2 \cdot \cos[-2 \cdot \Phi] \quad (3.11)$$

3.3 Resolución de las ecuaciones y determinación de las TTVs

Utilizando las ecuaciones descritas en el apartado 3.2 se puede explorar el espacio de parámetros que definen la forma de las TTVs.

En el momento del tránsito, de acuerdo con el sistema de referencia anteriormente descrito, la componente Y de la posición del planeta es nula y la componente Z ha de ser negativa (será positiva en el eclipse secundario). Si se invierte la ecuación para la posición Y, y se obtienen los tiempos para los que se cumple la condición Y=0, comparándolos con los tiempos esperados si la periodicidad fuese regular, se pueden obtener las TTVs. Y representar la gráfica O-C tal y como se desarrolla en el apartado 3.1 de este capítulo.

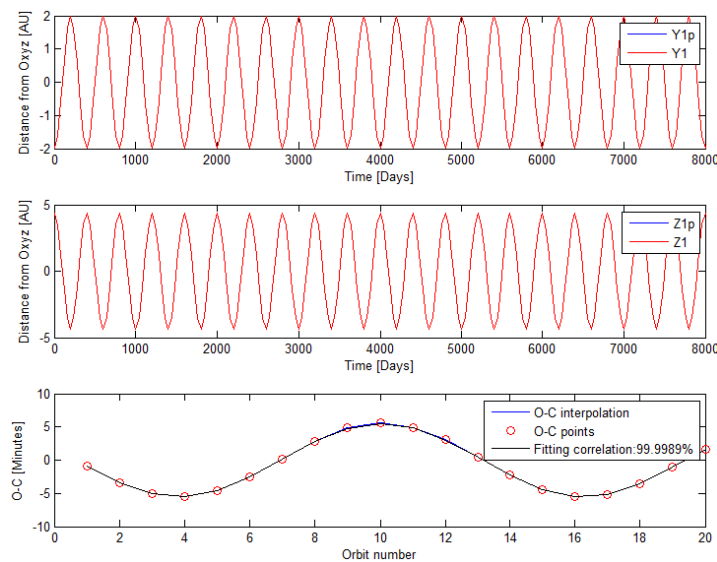


Figura 3.2 Arriba las componentes Y y Z de la posición proyectada en el plano del cielo de un planeta con masa de Júpiter y un periodo de 400 días. Las señales mostradas en rojo, Y1 y Z1, describen el movimiento de un planeta que no tendría troyano, mientras que las señales mostradas en azul, Y1p y Z1p, muestran el movimiento del planeta con el troyano. Abajo las TTVs que produce sobre este planeta un troyano con la masa de la tierra, representadas con puntos de color rojo, unidos por una línea azul. En negro se representa el ajuste de estas TTVs a un modelo formado por una señal sinusoidal y un segundo armónico.

En el caso mostrado en la figura 3.2, las variaciones son de unos minutos en un periodo de 400 días, por lo que las señales Y1 y Y1p, así como las señales Z1 y Z1p quedan superpuestas.

En la Figura 3.3 se muestra un ejemplo con un troyano de una masa de 30 veces la Tierra. En este caso, las TTVs son mayores y la diferencia entre Y1p e Y1 es más significativa.

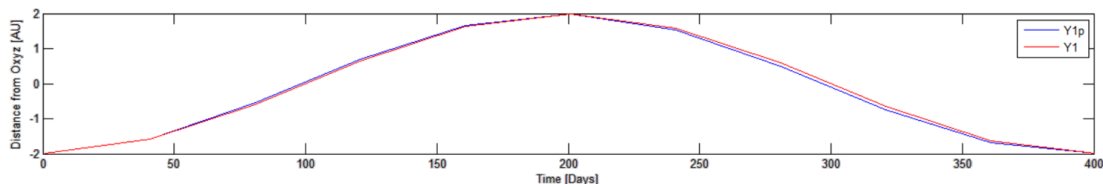


Figura 3.3 Comparación del movimiento orbital planetario en el eje Y con troyano (Y1p) y sin troyano (Y1).

En base a esto, y calculando los instantes de tiempo en los que el planeta realiza un tránsito primario, como ya se comentó, se pueden obtener a partir de las señales Y1p y Z1p los puntos TTO, y a partir de las señales Y1 y Z1, los puntos que corresponden a los tránsitos del mismo planeta si no tuviera un compañero coorbital. Obtenido esto, se puede calcular las TTVs, tal y como se explica en la sección 3.1

Anteriormente se comentó que las variaciones en el tiempo de tránsito de un planeta se pueden producir por la presencia de un compañero orbital, como es el caso de un troyano. Por tanto, es fácil deducir que sin la presencia de este troyano o si la libración del mismo en torno al punto de Lagrange es nula, no se producirán variaciones en el tiempo de tránsito y por tanto el periodo del planeta será constante y determinista tal como se refleja en la Figura 3.4.

Con el fin de determinar estas posiciones y tiempos de tránsito, así como para realizar determinados cálculos, de forma sencilla y cómoda se han implementado varias funciones y códigos en lenguaje Matlab®. El código fuente se puede consultar y descargar de su correspondiente repositorio en GitHub⁵ al que se ha denominado TTTV Tools, *Trojan Transit Timing Variations Tools*. En el Anexo II se puede encontrar un listado de los códigos y funciones de este repositorio y una breve descripción de cada uno. Es preciso también comentar que las gráficas aquí expuestas tienen los títulos en inglés ya que el TTTV Tools se ha programado con la idea de que pueda ser utilizado

⁵ TTTV Tools GitHub Repository: https://github.com/joseatienzapiedra/TTTV_Tools

por el resto de integrantes del proyecto TROY, y por la comunidad astronómica en general.

Realizar un ajuste de los O-C permite extraer información de esa señal como la amplitud o el periodo de forma precisa. Para ello se ha programado un algoritmo de ajuste que se encuentra junto al resto de funciones y códigos en el ya mencionado repositorio de GitHub.

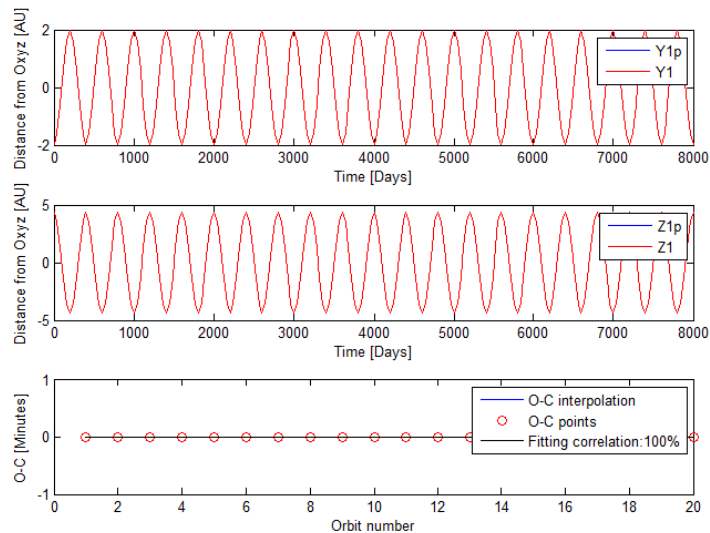


Figura 3.4 Arriba las componentes Y y Z de la posición proyectada en el plano del cielo de un planeta con masa de Júpiter y un periodo de 400 días. Las señales mostradas en rojo, Y1 y Z1, describen el movimiento de un planeta que no tendría troyano, mientras que las señales mostradas en azul, Y1p y Z1p, muestran el movimiento del planeta con el troyano. Abajo las TTVs que produce sobre este planeta un troyano sin masa (sin troyano), representadas con puntos de color rojo, unidos por una línea azul. En negro se representa el ajuste de estas TTVs a un modelo formado por una señal sinusoidal y un segundo armónico.

Es preciso destacar que estas TTVs no pueden ser descritas por una sola señal sinusoidal, sino que están compuestas por dos señales sinusoidales, un fundamental de frecuencia ν , y un segundo armónico de frecuencia $2 \cdot \nu$. La relación de estas señales con los parámetros orbitales se establece en la ecuación 3.8 del apartado 3.4. El teorema de Fourier enuncia que toda señal periódica puede ser expresada mediante la suma de infinitas señales sinusoidales (Dym, 1985). Sin embargo, en este caso es suficiente con dos, el fundamental y el segundo armónico, para caracterizar apropiadamente las TTVs.

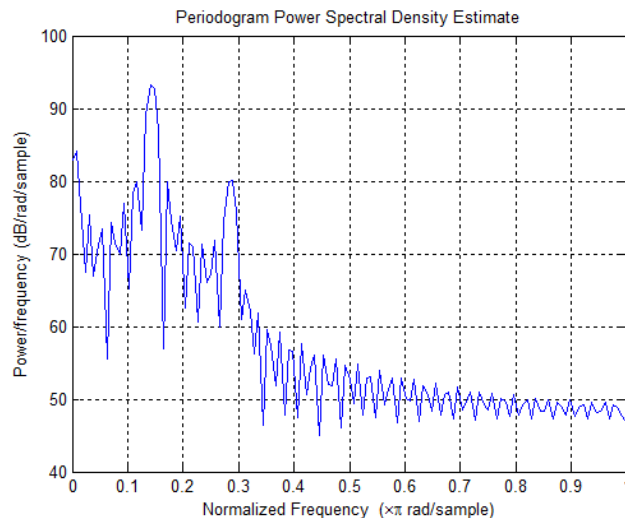


Figura 3.5 Periodograma de las TTVs de un planeta con la masa de Júpiter y un periodo de 400 días. El troyano es de masa terrestre y tiene una amplitud de libración de 20° . Se puede comprobar la presencia de un segundo armónico.

3.4 Estudio de la influencia de los diferentes parámetros sobre las TTVs

Como se comentó en el apartado anterior, con el fin de obtener los parámetros característicos de la forma de las TTVs, se desarrolló un algoritmo de ajuste automático.

Adicionalmente, se programó otro algoritmo que también se encuentra disponible en GitHub⁵, que permite hacer un barrido de cada uno de los parámetros de las ecuaciones de movimiento orbital con el fin de ver su influencia en las TTVs. De esta forma se puede estudiar, por ejemplo, si una masa del troyano mayor provoca una mayor o menor amplitud, y su influencia sobre el periodo, la fase u otros parámetros de las TTVs.

Empleando estas herramientas, se ha explorado el espacio de parámetros que determinan la forma de las TTVs.

En la Figura 3.6a y en la Figura 3.6b se muestra la influencia de un troyano con masa comprendida entre 0.05 y 1 masas de Júpiter, de nuevo hospedado en la región L4, con una amplitud de libración de 20° , de un planeta con las propiedades físicas y orbitales de Júpiter orbitando una estrella de masa solar sobre las TTVs.

En la Figura 3.6a se muestran los parámetros que definen la forma del fundamental (amplitud, desplazamiento, periodo y fase), y cómo varían respecto de la masa del troyano. En la Figura 3.6b, de forma análoga se muestra la influencia sobre los parámetros del segundo armónico.

La herramienta desarrollada también permite calcular la correlación del cálculo y la dependencia de la distorsión armónica total, THD (del inglés *Total Harmonic Distorsion*), respecto a la masa del troyano. La correlación en este caso de ejemplo se ha mantenido por encima del 99.9994% y la THD se ha mantenido estable en 8.9%. Este último dato se muestra con el fin de dar una idea de la potencia relativa entre la señal del fundamental de las TTV y el segundo armónico.

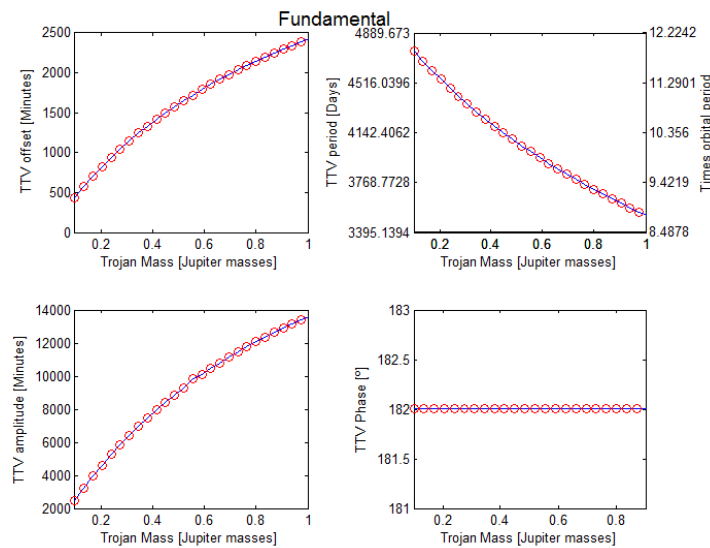


Figura 3.6a Dependencia de los parámetros del fundamental respecto a la masa del troyano para un planeta con la masa y periodo de Júpiter orbitando una estrella con la masa del Sol.

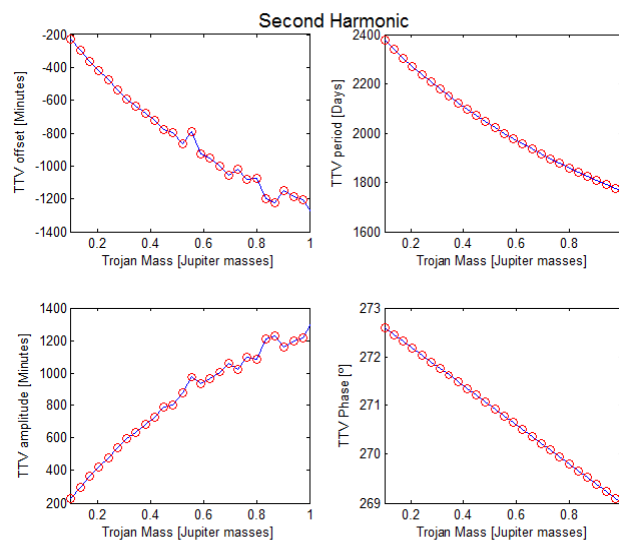


Figura 3.6b Dependencia de los parámetros del segundo armónico respecto a la masa del troyano para un planeta con la masa y periodo de Júpiter orbitando una estrella con la masa del Sol.

Observando las figuras 3.6a y 3.6b se puede deducir que un troyano más masivo provoca unas TTVs de mayor amplitud y de mayor periodo. También se puede deducir entre otras cosas, que la amplitud del segundo armónico aumenta significativamente menos que la del fundamental, provocando que la distorsión total armónica permanezca más o menos constante.

La Tabla 3.1 muestra la dependencia de cada parámetro del fundamental y del segundo armónico respecto de cada uno de los parámetros orbitales y físicos del sistema.

	Fundamental				Segundo Armónico				
	Periodo	Amplitud	Desp ⁶	Fase	Periodo	Amplitud	Desp ⁵	Fase	THD
Masa de la estrella	++	X	X	-	++	X	X	X	X
Masa del planeta	--	--	--	+	--	--	++	X	X
Masa del troyano	-	++	+	X	-	++	--	X	X
Periodo orbital	++	++	+	X	++	+	-	-	X
Z	+	++	++	X	+	++	--	X	++
J_1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
a	X	X	X	X	X	X	X	X	X
$\Omega_{1,0}$	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Φ_{obs}	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Φ	Xsin*	X	+++*	X	Xsin*	X	X	X	X

Tabla 3.1 Resumen cualitativo de dependencia de los parámetros.

X: El parámetro no varía de forma significativa.

+: El parámetro oscilatorio aumenta al aumentar el parámetro físico u orbital.

++: Como el anterior, pero aumentando al menos un orden de magnitud.

-: El parámetro oscilatorio disminuye al aumentar el parámetro físico u orbital.

++: Como el anterior, pero disminuyendo al menos un orden de magnitud.

Se han registrado también algunos casos que merecen un análisis algo más detallado:

- En el caso del parámetro Φ , se ha denotado la fase del fundamental como +++-* ya que este aumenta y disminuye siguiendo una forma sinusoidal en función del valor de Φ , ver panel superior izquierdo de la Figura 3.8.
- Se ha denotado a la variación que sufren los periodos tanto del fundamental como del segundo armónico como Xsin*, ya que describen una forma sinusoidal que varía muy poco en amplitud de su valor central, es decir del que tendrían con $\Phi = 0^\circ$, al hacer variar el parámetro Φ , tal como se aprecia en el panel superior derecho de la Figura 3.8.

⁶ Desplazamiento

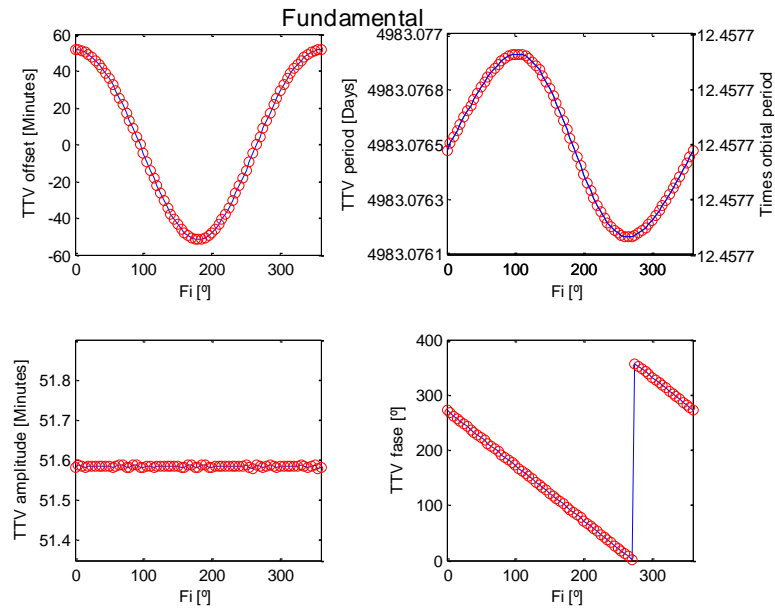


Figura 3.8 Casos especiales de dependencias de parámetros.

Los parámetros de mayor interés de cara a caracterizar un posible troyano en base a sus TTVs son la amplitud y el periodo, ya que están relacionados con parámetros físicos como las masas del planeta y del troyano. Por otro lado, ya que la fase y el desplazamiento dependen de parámetros geométricos, no permitirán inferir la masa o la libración del troyano.

En base a las dependencias paramétricas recogidas en la Tabla 3.1 se han elaborado gráficas que reflejan de forma cualitativa la dependencia de la amplitud y el periodo de las TTVs con la masa del troyano, la amplitud del movimiento de libración, la masa planetaria y la masa estelar.

La amplitud de las TTVs de un planeta con un troyano en L4 o L5 varía, tal y como se recoge en la Tabla 3.1, en función de la masa del troyano, el valor de z , el periodo orbital y la masa del planeta. Esta dependencia se puede observar en las figuras 3.9, 3.10 y 3.11.

Es fácil apreciar cómo la amplitud de las TTVs es mayor para mayores masas del troyano y para mayores periodos orbitales, así como para mayores amplitudes de libración. Sin embargo, la amplitud de las TTVs decae a mayores masas planetarias.

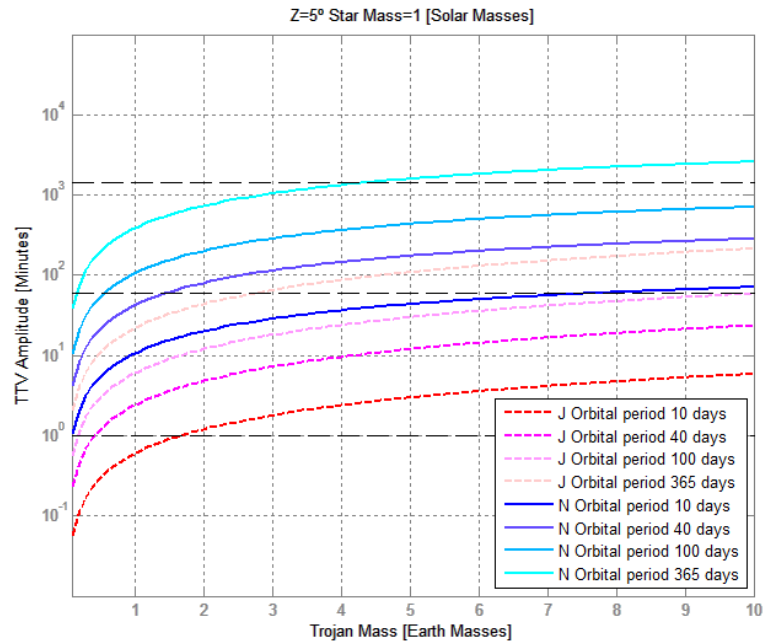


Figura 3.9 Dependencia de la amplitud de las TTVs respecto de la masa de un troyano con una amplitud de libración de 5° . Para un planeta con la masa de Júpiter (J) o Neptuno (N) y para diferentes valores del periodo orbital. Las tres líneas horizontales discontinuas muestran el valor de 1 minuto, 1 hora y 1 día.

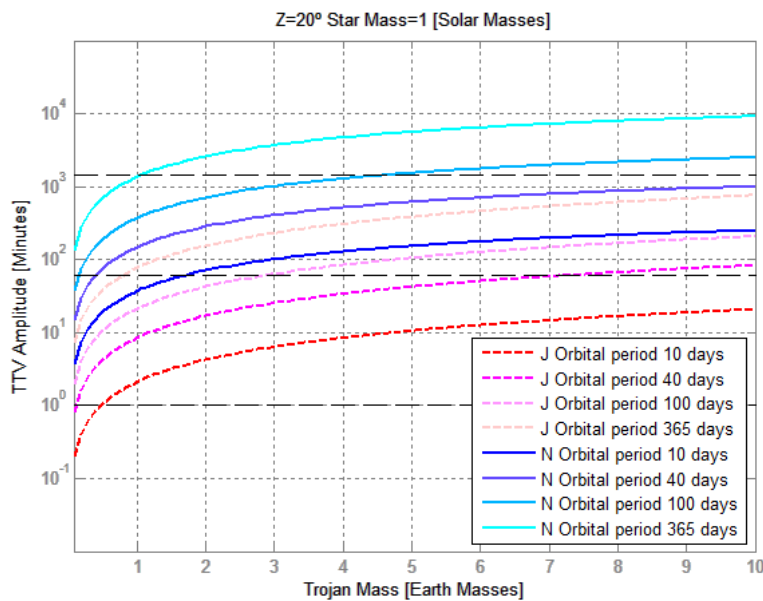
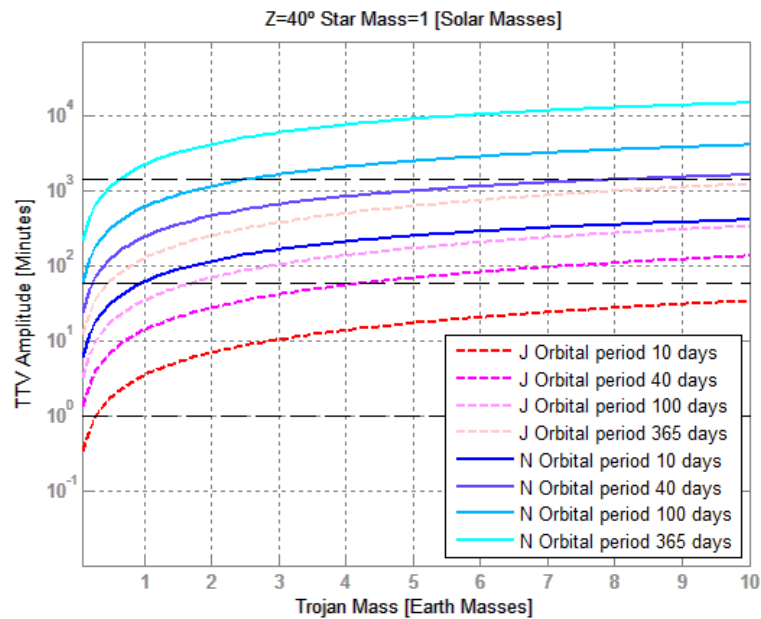


Figura 3.10 Dependencia de la amplitud de las TTVs respecto de la masa de un troyano con una amplitud de libración de 20° . Para un planeta con la masa de Júpiter (J) o Neptuno (N) y para diferentes valores del periodo orbital. Las tres líneas horizontales discontinuas muestran el valor de 1 minuto, 1 hora y 1 día.



3.11 Dependencia de la amplitud de las TTVs respecto de la masa de un troyano con una amplitud de libración de 40°. Para un planeta con la masa de Júpiter (J) o Neptuno (N) y para diferentes valores del periodo orbital. Las tres líneas horizontales discontinuas muestran el valor de 1 minuto, 1 hora y 1 día.

Con objeto de discutir la dependencia de parámetros descrita en las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11, se plantearán diferentes escenarios que ayuden a ilustrar dicha dependencia.

La presencia de un troyano de diez masas terrestres coorbitando con un planeta con la masa de Júpiter y una órbita de 100 días, provoca unas TTVs con una amplitud de aproximadamente una hora, tal como se muestra en la Figura 3.9, si la amplitud de libración es de 5°. En un escenario similar pero con una masa planetaria como la de Neptuno y un periodo orbital de 10 días, la amplitud de las TTVs es también de aproximadamente una hora. De esta forma se presenta un claro ejemplo de cómo distintas configuraciones de masas y periodos pueden provocar TTVs de amplitudes similares.

Otro escenario posible es el de un troyano con la masa de la Tierra, que coorbite con un planeta con la masa de Neptuno y un periodo orbital de 365 días y una amplitud de libración de 20°. En este caso la amplitud de las TTVs es de hasta un día, como se puede comprobar en la Figura 3.10. Sin embargo, si el planeta tuviera la masa de Júpiter, las TTVs tendrían una amplitud de poco más de una hora. Esto representa un claro ejemplo de la dependencia de la masa planetaria sobre la amplitud de las TTVs.

La dependencia de la amplitud de las TTVs respecto de la amplitud de libración se puede comprobar partiendo del escenario anteriormente descrito. En este caso se comentaba que la amplitud de las TTVs era de poco más de una hora para una amplitud de libración de 20° . Sin embargo, la amplitud de las TTVs baja hasta unos 20 minutos si la amplitud de libración es de 5° y sube hasta dos horas aproximadamente si la amplitud de libración es de 40° , como se puede comprobar en las Figuras 3.9 y 3.11.

Se ha discutido el espacio de parámetros que definen la amplitud de las TTVs. A continuación se analizará la influencia de los diferentes parámetros sobre el periodo de las TTVs.

En la Tabla 3.1 se reflejaba que el periodo de las TTVs depende del periodo orbital. Dicha dependencia, tal como se puede apreciar en las Figuras 3.12 y 3.13, es lineal ya que independientemente del periodo orbital, las diferentes líneas de cada gráfica quedan perfectamente superpuestas. Así por ejemplo un troyano de 4 masas terrestres coorbitando con un planeta tipo Júpiter en torno a una estrella de 0.4 masas solares, provoca un periodo TTVs de 7.84 veces el periodo orbital, independientemente de cual sea el valor de este último.

El periodo de las TTVs es por tanto directamente proporcional al periodo orbital, algo que se puede demostrar analíticamente a partir de la ecuación 3.10, que relaciona la frecuencia de libración con la frecuencia orbital y que expresada en términos de periodo queda como se ve en la ecuación 3.12.

$$P_{TTV} = \frac{P_{Orbital}}{\sqrt{\frac{27}{4} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2}}} \quad (3.12)$$

Por otro lado, se puede comprobar, en las Figuras 3.12 y 3.13, cómo con el aumento de la masa del troyano, decae el periodo de las TTVs aunque no influye tanto como la masa del planeta o de la estrella.

Se puede plantear un escenario en el que un troyano con la masa de la Tierra coorbita con un planeta con la masa de Neptuno. En este caso el periodo de las TTVs será aproximadamente 33 veces el periodo orbital si la estrella es de 0.4 masas solares. Sin embargo, si la estrella tiene la misma masa que el Sol, el periodo de las TTVs será de unas 52 veces el periodo orbital. De esta forma que queda patente cómo a mayor masa estelar, mayor es el periodo de las TTVs. Esto último se puede comprobar analíticamente mediante la ecuación 3.12 y gráficamente en la Figura 3.13.

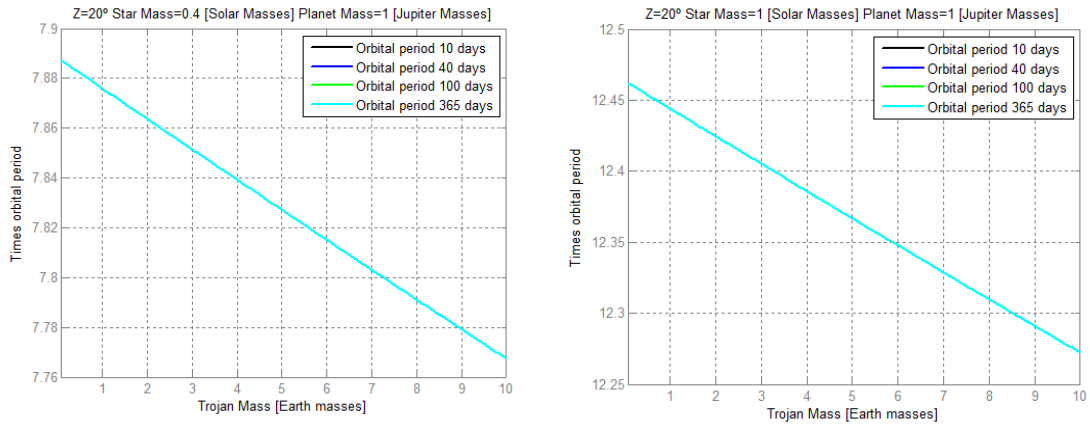


Figura 3.12 Dependencia del periodo de las TTVs respecto de la masa de un troyano que coorbita con un planeta con la masa de Júpiter, para diferentes periodos orbitales y diferentes masas estelares.

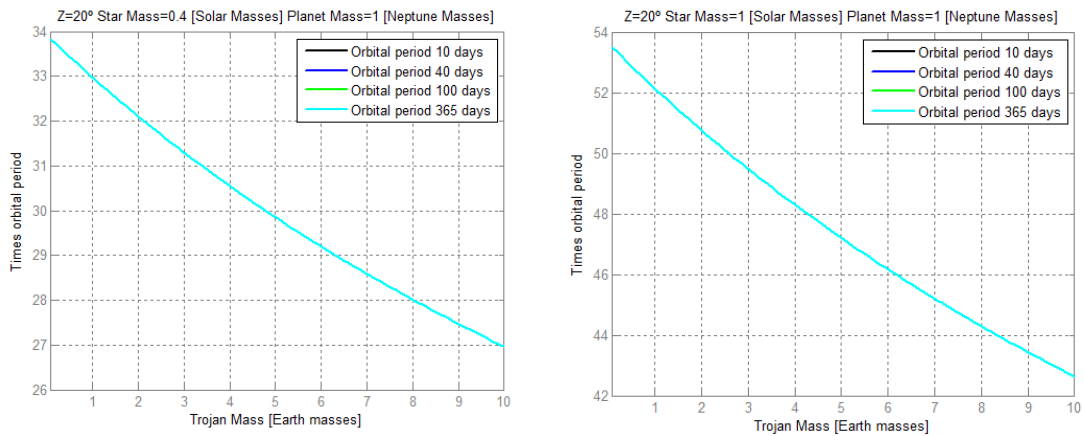


Figura 3.13 Dependencia del periodo de las TTVs respecto de la masa de un troyano que coorbita con un planeta con la masa de Neptuno, para diferentes periodos orbitales y diferentes masas estelares.

Con objeto de discutir la dependencia del periodo de las TTVs respecto de la masa planetaria, se puede plantear un sistema planetario con una estrella análoga al sol y un planeta con un compañero coorbital con una masa de 6 veces la masa de la Tierra. Si el planeta tiene la masa de Júpiter el periodo de las TTVs es unas 12.35 veces mayor que el periodo orbital, ver Figura 3.12. Sin embargo, si el planeta tiene la masa de Neptuno, el periodo de las TTVs será de unas 46 veces el periodo orbital, ver Figura 3.13. Esto ilustra que cuanto mayor es la masa del planeta, menor es el periodo de las TTVs.

4.- Aplicación del estudio teórico a los candidatos

Una vez estudiadas las dependencias de los parámetros de las TTVs respecto a los parámetros orbitales y físicos tales como las masas de la estrella, el planeta y la masa del troyano, se procede a analizar para cada uno de los candidatos expuestos en el Capítulo 2 de esta memoria, la forma de sus TTVs y comprobar si su origen puede ser compatible con la presencia de un compañero orbital situado en los puntos L4 o L5.

4.1.- Recopilación de datos y estudio del periodo TTV de los planetas candidatos

En el Capítulo 3 se indicó que uno de los parámetros que definen las TTVs de un planeta es el periodo de las TTVs. Si se atiende a las ecuaciones expuestas en ese mismo capítulo, se puede comprobar como la frecuencia de libración de un troyano respecto su punto de Lagrange, se describe por la ecuación 3.12. De esta forma, teniendo en cuenta la masa de la estrella y del planeta a estudiar, así como su periodo orbital y los errores asociados a cada medida, se puede calcular un rango dentro del cual, podría ser compatible la hipótesis de que dichas TTVs estén provocadas por un troyano situado en L4 o L5, para masas del troyano entre 0 y la masa del planeta, y un margen de $\pm 3\sigma$, en cada parámetro.

Se han dado casos en los que las masas estelares no se encuentran publicadas, por lo que se han calculado en base a la gravedad superficial, y el radio estelar utilizando la ley de gravitación universal. El resultado se muestra en la Tabla 4.1, habiendo obtenido todos los datos de la web del *Exoplanet Follow-up Observing Program (ExoFOP)*⁷. Ya que los valores de las gravedades superficiales se dan sin valor del error, se ha supuesto un error de 0.2 dex para todos los casos.

Por otro lado, en los casos de aquellos planetas cuya masa, a fecha de la redacción de este Trabajo Fin de Máster, no ha sido publicada o tan solo se dispone de una cota superior como en el caso de Kepler-59b y Kepler-59c, se ha utilizado una estimación en base a su radio por medio de la herramienta *Forecaster*, disponible en GitHub⁸ que se basa en modelos probabilísticos para calcular la masa de un planeta en base a su radio y viceversa (Chen & Kipping, 2016), recogiendo estos resultados en la Tabla 4.2.

⁷ Exoplanet Follow-up Observing Program: <https://exofop.ipac.caltech.edu/kepler/welcome.php>

⁸ Forecaster GitHub Repository: <https://github.com/chenjj2/forecaster>

Estrella	Gravedad superficial [$\log(\text{cm/s}^2)$]	Radio [R_{\odot}]	Masa estelar [M_{\odot}]
Kepler-160	$4.33^{+0.20}_{-0.20}$	$1.09^{+0.16}_{-0.16}$	$0.92^{+0.67^a}_{-0.39}$
Kepler-230	$4.56^{+0.20}_{-0.20}$	$0.80^{+0.18}_{-0.18}$	$0.84^{+0.76^a}_{-0.40}$
Kepler-309	$4.76^{+0.20}_{-0.20}$	$0.50^{+0.04}_{-0.04}$	$0.52^{+0.32^a}_{-0.20}$
Kepler-397	$4.57^{+0.20}_{-0.20}$	$0.76^{+0.05}_{-0.05}$	$0.78^{+0.48^a}_{-0.30}$
Kepler-405	$4.54^{+0.20}_{-0.20}$	$0.88^{+0.26}_{-0.26}$	$0.97^{+1.10^a}_{-0.51}$
Kepler-195	$4.59^{+0.20}_{-0.20}$	$0.79^{+0.13}_{-0.13}$	$0.87^{+0.67^a}_{-0.38}$
Kepler-209	$4.47^{+0.20}_{-0.20}$	$0.91^{+0.11}_{-0.11}$	$0.90^{+0.62^a}_{-0.37}$
Kepler-210	$4.73^{+0.20}_{-0.20}$	$0.53^{+0.03}_{-0.03}$	$0.55^{+0.34^a}_{-0.21}$
Kepler-312	$4.41^{+0.20}_{-0.20}$	$1.15^{+0.20}_{-0.20}$	$1.22^{+0.96^a}_{-0.54}$
Kepler-111	$4.29^{+0.20}_{-0.20}$	$1.23^{+0.21}_{-0.21}$	$1.09^{+0.85^a}_{-0.48}$
Kepler-278	$3.62^{+0.20}_{-0.20}$	$3.05^{+0.20}_{-0.20}$	$1.41^{+0.87^a}_{-0.54}$
Kepler-159	$4.76^{+0.20}_{-0.20}$	$0.50^{+0.04}_{-0.04}$	$0.52^{+0.32^a}_{-0.20}$
Kepler-199	$4.54^{+0.20}_{-0.20}$	$0.88^{+0.12}_{-0.12}$	$0.97^{+0.69^a}_{-0.40}$

Tabla 4.1 ^aMasas estelares estimadas a partir del radio y la gravedad superficial para aquellos casos en los que dicha masa no había sido publicada.

Planeta	Radio [R_J]	Masa [M_J]
Kepler-410 Ab	$0.223^{+0.004}_{-0.004}$	$0.025^{+0.021^b}_{-0.021}$
Kepler-71b	$1.167^{+0.025}_{-0.022}$	$23^{+32^b}_{-32}$
Kepler-108c	$0.696^{+0.037}_{-0.045}$	$8^{+19^b}_{-19}$
Kepler-139c	$0.228^{+0.033}_{-0.023}$	$0.028^{+0.017^b}_{-0.017}$
Kepler-160c	$0.304^{+0.042}_{-0.023}$	$0.044^{+0.037^b}_{-0.037}$
Kepler-230b	$0.380^{+0.194}_{-0.194}$	$0.33^{+2.7^b}_{-2.7}$
Kepler-309c	$0.277^{+0.035}_{-0.032}$	$0.037^{+0.027^b}_{-0.027}$
Kepler-315b	$0.399^{+0.693}_{-0.069}$	$19^{+44^b}_{-44}$
Kepler-397c	$0.567^{+0.025}_{-0.033}$	$1.0^{+7.3^b}_{-7.3}$
Kepler-405c	$0.343^{+0.045}_{-0.075}$	$0.053^{+0.041^b}_{-0.041}$
Kepler-195b	$0.201^{+0.014}_{-0.014}$	$0.022^{+0.013^b}_{-0.013}$
Kepler-209c	$0.267^{+0.016}_{-0.012}$	$0.035^{+0.021^b}_{-0.021}$
Kepler-210c	$0.383^{+0.008}_{-0.008}$	$0.077^{+0.059^b}_{-0.059}$
Kepler-312c	$0.232^{+0.012}_{-0.010}$	$0.028^{+0.014^b}_{-0.014}$
Kepler-111b	$0.162^{+0.026}_{-0.030}$	$0.017^{+0.012^b}_{-0.012}$
Kepler-278b	$0.347^{+0.013}_{-0.040}$	$0.058^{+0.044^b}_{-0.044}$
Kepler-159b	$0.232^{+0.005}_{-0.018}$	$0.029^{+0.022^b}_{-0.022}$
Kepler-199b	$0.264^{+0.006}_{-0.005}$	$0.028^{+0.016^b}_{-0.016}$
Kepler-111c	$0.699^{+0.107}_{-0.076}$	$8^{+21^b}_{-21}$
Kepler-278c	$0.267^{+0.012}_{-0.018}$	$0.034^{+0.028^b}_{-0.028}$
Kepler-415c	$0.251^{+0.015}_{-0.012}$	$0.032^{+0.026^b}_{-0.026}$
Kepler-416c	$0.219^{+0.023}_{-0.014}$	$0.027^{+0.017^b}_{-0.017}$
Kepler-417c	$0.240^{+0.017}_{-0.012}$	$0.030^{+0.017^b}_{-0.017}$
Kepler-159c	$0.327^{+0.007}_{-0.031}$	$0.046^{+0.028^b}_{-0.028}$
Kepler-199c	$0.281^{+0.007}_{-0.006}$	$0.038^{+0.027^b}_{-0.027}$
Kepler-59b	$0.102^{+0.028}_{-0.012}$	$0.0064^{+0.0061^b}_{-0.0061}$
Kepler-59c	$0.171^{+0.052}_{-0.023}$	$0.018^{+0.016^b}_{-0.016}$

Tabla 4.2 ^bMasas planetarias estimadas con el paquete *Forecaster* para aquellos casos en los que la masa planetaria no había sido publicada.

Los periodos de las TTVs de cada planeta se han extraído de Holczer et al. (2016) salvo que se indique lo contrario. Se han encontrado casos en los que el periodo de las TTVs no había sido publicado, por lo que se han calculado utilizando un análisis de Fourier.

Se han encontrado casos, además, en los que el modelo de ajuste reflejado en las fuentes de referencia era el de un modelo no periódico, como puede ser el caso de un polinomio para las TTVs de Kepler-412b (Holczer et al., 2016). Para estos casos también se han buscado periodicidades mediante un análisis de Fourier. De nuevo, salvo que se indique lo contrario, los datos utilizados para calcular los periodos se han extraído de Holczer et al. (2016).

Se han tomado las 4 periodicidades más significativas encontradas en cada caso asumiendo un error del $\pm 10\%$, recogándose en la Tabla 4.3. Se ha marcado con un guion (-), aquellos casos en los que no se han encontrado periodicidades.

Planeta	Periodo orbital [días]	Periodo TTV 1 [días]	Periodo TTV 2 [días]	Periodo TTV 3 [días]	Periodo TTV 4 [días]
Kepler-412b	$1.720861380^{+4.0 \cdot 10^{-8}}_{-4.0 \cdot 10^{-8}}$	$307^{+31}_{-31}^c$	$138^{+14}_{-14}^c$	$111^{+11}_{-11}^c$	$83^{+8}_{-8}^c$
Kepler-10c	$45.29460^{+8.0 \cdot 10^{-4}}_{-8.0 \cdot 10^{-4}}$	$589^{+59}_{-59}^c$	$393^{+39}_{-39}^c$	$178^{+18}_{-18}^c$	$168^{+17}_{-17}^c$
Kepler-315b	$96.110504^{+3.0 \cdot 10^{-5}}_{-3.0 \cdot 10^{-5}}$	— ^c	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-111b	$3.3417993^{+3.3 \cdot 10^{-6}}_{-3.3 \cdot 10^{-6}}$	— ^{c 9}	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-278b	$30.1602115^{+9.1 \cdot 10^{-6}}_{-9.1 \cdot 10^{-6}}$	— ^{c 9}	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-328b	$34.91897^{+3.3 \cdot 10^{-5}}_{-3.3 \cdot 10^{-5}}$	$88^{+9}_{-9}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-415b	$4.176345^{+2.2 \cdot 10^{-5}}_{-2.2 \cdot 10^{-5}}$	$12^{+1}_{-1}^{c 10}$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-416b	$6.3194328^{+1.8 \cdot 10^{-6}}_{-1.8 \cdot 10^{-6}}$	$174^{+17}_{-17}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-417b	$12.3309115^{+4.6 \cdot 10^{-6}}_{-4.6 \cdot 10^{-6}}$	$35^{+4}_{-4}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-59b	$11.86915^{+2.8 \cdot 10^{-4}}_{-2.8 \cdot 10^{-4}}$	$54^{+5}_{-5}^{c 9}$	$28^{+3}_{-3}^{c 9}$	— ^c	— ^c
Kepler-159b	$10.139623^{+1.4 \cdot 10^{-5}}_{-1.4 \cdot 10^{-5}}$	$58^{+6}_{-6}^c$	$28^{+3}_{-3}^c$	— ^c	— ^c
Kepler-159c	$43.582586^{+4.4 \cdot 10^{-5}}_{-4.4 \cdot 10^{-5}}$	— ^c	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-199b	$23.642105^{+1.5 \cdot 10^{-5}}_{-1.5 \cdot 10^{-5}}$	— ^c	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-297c	$74.928476^{+1.7 \cdot 10^{-5}}_{-1.7 \cdot 10^{-5}}$	— ^{c 9}	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-328c	$71.311823^{+1.1 \cdot 10^{-5}}_{-1.1 \cdot 10^{-5}}$	$232^{+23}_{-23}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-415c	$8.7079231^{+4.5 \cdot 10^{-6}}_{-4.5 \cdot 10^{-6}}$	$42^{+4}_{-4}^c$	$21^{+2}_{-2}^c$	— ^c	— ^c
Kepler-416c	$12.2094828^{+3.2 \cdot 10^{-6}}_{-3.2 \cdot 10^{-6}}$	$116^{+12}_{-12}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-417c	$15.9425263^{+4.3 \cdot 10^{-6}}_{-4.3 \cdot 10^{-6}}$	$36^{+4}_{-4}^c$	— ^c	— ^c	— ^c
Kepler-199c	$67.0934269^{+1.9 \cdot 10^{-6}}_{-1.9 \cdot 10^{-6}}$	$226^{+23}_{-23}^c$	— ^c	— ^c	— ^c

Tabla 4.3 ^cPeriodos de las TTVs calculados mediante análisis de Fourier.

⁹ (Rowe et al, 2014)

¹⁰ (Mazeh et al, 2013)

Anteriormente se comentó que para calcular el rango de valores para el periodo de las TTVs compatible con la presencia de un troyano se ha utilizado la ecuación 3.12. Sin embargo en algunos casos, la falta de precisión en valores de la masa planetaria, ha provocado que no se pudiera calcular una cota superior para el periodo de dichas TTVs. En estos casos se ha calculado una cota inferior teniendo en cuenta la masa de la estrella, el periodo orbital y el caso extremo en el que el planeta tuviera unas 13 masas de Júpiter.

Es preciso también comentar que en algunos casos, los datos de las masas estelares se han encontrado sin sus errores asociados, por lo que en todos estos casos se ha asumido un error de ± 0.1 masas solares.

En las Tablas 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 se muestran los planetas candidatos a albergar troyanos con sus parámetros físicos y orbitales. Para la elaboración de estas tablas, en el caso de masas y periodos orbitales, se ha utilizado como fuente la base de datos *NASA Exoplanet Archive*¹ salvo que se especifique otra referencia.

Tal y como se comentaba anteriormente, existen algunos planetas cuyas TTVs se habían ajustado anteriormente a una función polinómica (Nesvorný et al., 2013), pero aun así se había intentado extraer alguna componente periódica de las TTVs. En casos como el de Kepler-412b se encontraron ciertas periodicidades, pero en otros no. Esto puede ser debido a una falta de datos en un periodo completo. De cualquier modo, si no se encuentra periodicidad alguna, el origen de estas TTVs no se puede explicar cuantitativamente por la presencia de un troyano en una configuración *tadpole*. Participan de este caso los planetas Kepler-315b, Kepler-199b y Kepler-297c. También se han dado dos casos de planetas en los que no había datos sobre el periodo de sus TTVs, por lo que se ha intentado calcular, habiendo resultado infructuosa la búsqueda de periodicidades como en el caso de Kepler-111b y Kepler-278b.

Aquellos planetas cuyo periodo TTVs se encuentra fuera del rango calculado, que compatibiliza estas variaciones en el tiempo de tránsito con la presencia de un troyano en configuración *tadpole*, pueden ser descartados. Por el contrario, estas TTVs se podrían explicar por la presencia de otro planeta, un satélite o un troyano en una configuración distinta a la que se estudia en este Trabajo Fin de Máster, como puede ser la configuración en *horseshoe* (Vokrouhlický & Nesvorný, 2014), (del inglés, herradura). Este sería el caso de Kepler-13b, Kepler-412b, Kepler-10c, Kepler-87b, Kepler-297b, Kepler-59b y Kepler-328c.

Por otro lado, si se observa la Tabla 4.5 se puede comprobar que el planeta Kepler-88b presenta un periodo TTVs compatible con la posibilidad de tener un troyano. Sin embargo, estas TTVs son debidas a la presencia de otro planeta en resonancia 2:1 (Mazeh et al., 2013) en el mismo sistema, Kepler-88c que fue confirmado por velocidad radial (Marcy et al., 2014).

Planeta	Masa estelar (M_{\odot})	Masa planetaria [MJ]	Periodo orbital [días]	Periodo TTV medido [días]	Rango Periodo TTV teórico [días]
Kepler-13b	$1.72^{+0.10}_{-0.10}$	$9.28^{+0.16}_{-0.16}$	$1.763587570^{+1.0 \cdot 10^{-8}}_{-1.10 \cdot 10^{-8}}$	$5.72^{+0.01}_{-0.01}$	[6, 11]
Kepler-410Ab	$1.21^{+0.03}_{-0.03}$	$0.025^{+0.021}_{-0.021}{}^b$	$17.8336570^{+2.2 \cdot 10^{-6}}_{-2.2 \cdot 10^{-6}}$	$960.6^{+9.2}_{-9.}$	$[47, +\infty]^d$
Kepler-17b	$1.16^{+0.06}_{-0.06}$	$2.34^{+0.09}_{-0.24}$	$1.485710920^{+3.0 \cdot 10^{-8}}_{-3.0 \cdot 10^{-8}}$	$12.02^{+0.05}_{-0.05}{}^{10}$ $6.02^{+0.01}_{-0.01}$	[7, 17]
Kepler-71b	$0.95^{+0.05}_{-0.05}$	$23^{+32}_{-32}{}^b$	$3.905081940^{+6.0 \cdot 10^{-8}}_{-6.0 \cdot 10^{-8}}$	$9.65^{+0.03}_{-0.03}$	$[9, +\infty]^d$
Kepler-412b	$1.17^{+0.09}_{-0.09}$	$0.94^{+0.12}_{-0.02}$	$1.720861380^{+4.0 \cdot 10^{-8}}_{-4.0 \cdot 10^{-8}}$	pol $307^{+31}_{-31}{}^c$	[13, 34]

Tabla 4.4 Planetas pertenecientes al grupo 1a_2 y 1bc, es decir que pertenecen a sistemas en los que solo se ha detectado un planeta no circumbinario.

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

c periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

d rangos de periodos TTVs calculados para masas planetarias de 0 a 13 MJ.

Planeta	Masa estelar (M _☉)	Masa planetaria [MJ]	Período orbital [días]	Período TTV medido [días]	Rango Período TTV teórico [días]
Kepler-10c	0.91 ^{+0.02} _{-0.02}	0.0232 ^{+0.004} _{-0.004}	45.2946 ^{+8·10⁻⁴} _{-8·10⁻⁴}	589 ⁺⁵⁹ ₋₅₉ ^c	[1941, 5423]
Kepler-108c	1.38 ^{+0.09} _{-0.09}	8 ⁺¹⁹ ₋₁₉ ^b	190.3208428 ^{+8.2·10⁻⁶} _{-8.2·10⁻⁶}	881 ⁺⁵⁶ ₋₅₆	[495, +∞] ^d
Kepler-136b	1.20 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.062 ^{+0.037} _{-0.033}	11.5788797 ^{+3.1·10⁻⁶} _{-3.1·10⁻⁶}	39.97 ^{+0.32} _{-0.32}	[27, +∞] ^d
Kepler-139c	1.08 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.028 ^{+0.017} _{-0.017} ^b	157.064726 ^{+1.8·10⁻⁵} _{-1.8·10⁻⁵}	1008 ⁺⁸⁴ ₋₈₄	[344, +∞] ^d
Kepler-160c	0.92 ^{+0.67} _{-0.39} ^a	0.044 ^{+0.037} _{-0.037} ^b	13.6994437 ^{+2.8·10⁻⁶} _{-2.8·10⁻⁶}	879 ⁺¹² ₋₁₂	[0, +∞] ^d
Kepler-230b	0.84 ^{+0.76} _{-0.40} ^a	0.3 ^{+2.7} _{-2.7} ^b	32.628852 ^{+1.4·10⁻⁵} _{-1.4·10⁻⁵}	1248 ⁺²¹ ₋₂₁	[0, +∞] ^d
Kepler-309c	0.52 ^{+0.32} _{-0.20} ^a	0.037 ^{+0.027} _{-0.027} ^b	105.358138 ^{+1.2·10⁻⁵} _{-1.2·10⁻⁵}	1410 ⁺¹⁸⁰ ₋₁₈₀	[0, +∞] ^d
Kepler-315b	0.78 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	19 ⁺⁴⁴ ₋₄₄ ^b	96.110504 ^{+3.0·10⁻⁵} _{-3.0·10⁻⁵}	Pol - _c	[0, +∞] ^d
Kepler-397c	0.78 ^{+0.48} _{-0.30} ^a	1.0 ^{+7.3} _{-7.3} ^b	135.4974874 ^{+8.6·10⁻⁶} _{-8.6·10⁻⁶}	757 ⁺¹⁹ ₋₁₉	[0, +∞] ^d
Kepler-405c	0.97 ^{+1.10} _{-0.51} ^a	0.053 ^{+0.041} _{-0.041} ^b	29.727280 ^{+1.1·10⁻⁵} _{-1.1·10⁻⁵}	791 ⁺⁴⁴ ₋₄₄	[0, +∞] ^d
Kepler-87b	1.10 ^{+0.05} _{-0.05}	1.020 ^{+0.028} _{-0.028}	114.736567 ^{+6.4·10⁻⁵} _{-6.4·10⁻⁵}	552 ⁺¹⁴ ₋₁₄	[939, 1652]
Kepler-88b	0.96 ^{+0.04} _{-0.05}	0.0270 ^{+0.0080} _{-0.0080}	10.953078 ^{+6.7·10⁻⁵} _{-6.7·10⁻⁵}	627.5 ^{+0.1} _{-0.1} 618 ⁺⁵⁸ ₋₅₈ ¹⁰	[383, 2624]
Kepler-161c	0.77 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.037 ^{+0.033} _{-0.033}	7.064267 ^{+1.5·10⁻⁶} _{-1.5·10⁻⁶}	280 ⁺³ ₋₃	[12, +∞] ^d
Kepler-195b	0.87 ^{+0.67} _{-0.38} ^a	0.022 ^{+0.013} _{-0.013} ^b	8.3078399 ^{+2.0·10⁻⁶} _{-2.0·10⁻⁶}	559 ⁺¹⁶ ₋₁₆	[0, +∞] ^d
Kepler-209c	0.90 ^{+0.62} _{-0.37} ^a	0.035 ^{+0.021} _{-0.021} ^b	41.7494510 ^{+3.6·10⁻⁶} _{-3.6·10⁻⁶}	1061 ⁺⁷⁶ ₋₇₆	[0, +∞] ^d
Kepler-210c	0.55 ^{+0.34} _{-0.21} ^a	0.077 ^{+0.059} _{-0.059} ^b	7.97251614 ^{+3.3·10⁻⁷} _{-3.3·10⁻⁷}	738 ⁺¹⁸ ₋₁₈	[0, +∞] ^d
Kepler-231c	0.58 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.076 ^{+0.042} _{-0.035}	19.2715342 ^{+4.8·10⁻⁶} _{-4.8·10⁻⁶}	515.6 ^{+9.6} _{-9.6}	[26, +∞] ^d
Kepler-312c	1.22 ^{+0.96} _{-0.54} ^a	0.028 ^{+0.014} _{-0.014} ^b	19.7473526 ^{+1.8·10⁻⁶} _{-1.8·10⁻⁶}	471 ⁺¹⁷ ₋₁₇	[0, +∞] ^d

Tabla 4.5 Planetas que pertenecen al grupo 2ab, es decir que se encuentran en sistemas en los que se han detectado dos planetas pero solo los expuestos teórico en la tabla presentan TTVs.

a masas estelares calculadas a partir del radio estelar y la gravedad superficial.

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

c periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

d rangos de periodos TTVs calculados para masas planetarias de 0 a 13 MJ.

e masas estelares en las que, por falta de datos, se ha asumido un error de ±0.1.

Planeta	Masa estelar (M _☉)	Masa planetaria [MJ]	Periodo orbital [días]	Periodo TTV medido [días]	Rango Periodo TTV teórico [días]
Kepler-103b	1.09 ^{+0.07} _{-0.07}	0.031 ^{+0.027} _{-0.027}	15.96532718 ^{+9.7·10⁻⁷} _{-9.7·10⁻⁷}	264 ⁺³ ₋₃ ¹¹	[37, +∞] ^d
Kepler-111b	1.09 ^{+0.85} _{-0.48} ^a	0.017 ^{+0.012} _{-0.012} ^b	3.3417993 ^{+3.3·10⁻⁶} _{-3.3·10⁻⁶}	- ^c ⁹	[0, +∞] ^d
Kepler-278b	1.41 ^{+0.87} _{-0.54} ^a	0.058 ^{+0.044} _{-0.044} ^b	30.1602115 ^{+9.0·10⁻⁶} _{-9.0·10⁻⁶}	- ^c ⁹	[0, +∞] ^d
Kepler-297b	0.85 ^{+0.06} _{-0.06}	0.153 ^{+0.035} _{-0.022}	38.8687241 ^{+9.1·10⁻⁶} _{-9.1·10⁻⁶}	1040 ⁺²⁰ ₋₂₀	[220, 411]
Kepler-328b	1.15 ^{+0.22} _{-0.16}	0.090 ^{+0.041} _{-0.039}	34.9189728 ^{+3.3·10⁻⁵} _{-3.3·10⁻⁵}	88 ⁺⁹ ₋₉ ^c	[61, +∞] ^d
Kepler-415b	0.67 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.377 ^{+0.321} _{-0.275}	4.176345 ^{+2.2·10⁻⁵} _{-2.2·10⁻⁵}	12 ⁺¹ ₋₁ ^c	[6, +∞] ^d
Kepler-416b	1.00 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.183 ^{+0.168} _{-0.124}	6.3194328 ^{+1.8·10⁻⁶} _{-1.8·10⁻⁶}	174 ⁺¹⁷ ₋₁₇ ^c ¹⁰	[13, +∞] ^d
Kepler-417b	0.90 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	0.035 ^{+0.029} _{-0.025}	12.3309115 ^{+4.6·10⁻⁶} _{-4.6·10⁻⁶}	35 ⁺⁴ ₋₄ ^c	[24, +∞] ^d
Kepler-59b	1.04 ^{+0.10} _{-0.10} ^e	< 2.05 0.0064 ^{+0.0061} _{-0.0061} ^b	11.86915 ^{+2.8·10⁻⁴} _{-2.8·10⁻⁴}	54 ⁺⁵ ₋₅ ^c ⁹	[89, +∞]
Kepler-159b	0.52 ^{+0.32} _{-0.20} ^a	0.029 ^{+0.022} _{-0.022} ^b	10.139624 ^{+1.4·10⁻⁵} _{-1.4·10⁻⁵}	58 ⁺⁶ ₋₆ ^c	[0, +∞] ^d
Kepler-199b	0.97 ^{+0.69} _{-0.40} ^a	0.028 ^{+0.016} _{-0.016} ^b	23.642105 ^{+1.5·10⁻⁵} _{-1.5·10⁻⁵}	Pol - ^c	[0, +∞] ^d

Tabla 4.6 Planetas (b) pertenecientes al grupo 2cd, es decir, a sistemas planetarios en los que se han detectado dos planetas y ambos presentan TTVs.

a masas estelares calculadas a partir del radio estelar y la gravedad superficial.

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

c periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

d rangos de periodos TTVs calculados para masas planetarias de 0 a 13 MJ.

e masas estelares en las que, por falta de datos, se ha asumido un error de ±0.1.

¹¹ (Van Eylen & Albrecht, 2015)

Planeta	Masa estelar (M_{\odot})	Masa planetaria [MJ]	Periodo orbital [días]	Periodo TTV medido [días]	Rango Periodo TTV teórico [días]
Kepler-103c	$1.09^{+0.07}_{-0.07}$	$0.114^{+0.079}_{-0.079}$	$179.607833^{+2.2 \cdot 10^{-5}}_{-2.2 \cdot 10^{-5}}$	514^{+22}_{-22} ¹¹	$[417, +\infty]^d$
Kepler-111c	$1.09^{+0.85^a}_{-0.48}$	$8.067^{+21.173^b}_{-21.173}$	$224.779239^{+4.1 \cdot 10^{-5}}_{-4.1 \cdot 10^{-5}}$	2213^{+79}_{-79}	$[0, +\infty]^d$
Kepler-278c	$1.41^{+0.87^a}_{-0.54}$	$0.034^{+0.028^b}_{-0.028}$	$51.074642^{+5.5 \cdot 10^{-5}}_{-5.5 \cdot 10^{-5}}$	829^{+41}_{-41} 464^{+88}_{-88} ¹¹	$[0, +\infty]^d$
Kepler-297c	$0.85^{+0.06}_{-0.06}$	$0.132^{+0.044}_{-0.029}$	$74.928477^{+1.7 \cdot 10^{-5}}_{-1.7 \cdot 10^{-5}}$	Pol - ^c	$[1154, 4451]$
Kepler-328c	$1.15^{+0.22}_{-0.16}$	$0.124^{+0.043}_{-0.040}$	$71.311824^{+1.1 \cdot 10^{-5}}_{-1.1 \cdot 10^{-5}}$	232^{+23}_{-23} ^c	$[891, 18898]$
Kepler-415c	$0.67^{+0.10^e}_{-0.10}$	$0.032^{+0.026^b}_{-0.026}$	$8.7079231^{+4.5 \cdot 10^{-6}}_{-4.5 \cdot 10^{-6}}$	42^{+4}_{-4} ^c	$[13, +\infty]^d$
Kepler-416c	$1.00^{+0.10^e}_{-0.10}$	$0.027^{+0.017^b}_{-0.017}$	$12.2094828^{+3.2 \cdot 10^{-6}}_{-3.2 \cdot 10^{-6}}$	116^{+12}_{-12} ^c	$[25, +\infty]^d$
Kepler-417c	$0.90^{+0.10^e}_{-0.10}$	$0.030^{+0.017^b}_{-0.017}$	$15.9425264^{+4.3 \cdot 10^{-6}}_{-4.3 \cdot 10^{-6}}$	36^{+4}_{-4} ^c	$[31, +\infty]^d$
Kepler-59c	$1.04^{+0.10^e}_{-0.10}$	< 1.37 $0.018^{+0.016^b}_{-0.016}$	$17.977590^{+1.5 \cdot 10^{-5}}_{-1.5 \cdot 10^{-5}}$	$623.4^{+8.6}_{-8.6}$	$[165, +\infty]$
Kepler-159c	$0.52^{+0.32^a}_{-0.20}$	$0.046^{+0.028^b}_{-0.028}$	$43.582587^{+4.4 \cdot 10^{-5}}_{-4.4 \cdot 10^{-5}}$	Pol - ^c	$[31, +\infty]^d$
Kepler-199c	$0.97^{+0.69^a}_{-0.40}$	$0.038^{+0.027^b}_{-0.027}$	$67.0934269^{+1.9 \cdot 10^{-6}}_{-1.9 \cdot 10^{-6}}$	226^{+23}_{-23} ^c	$[0, +\infty]^d$

Tabla 4.7 Planetas (c) pertenecientes al grupo 2cd, es decir, a sistemas planetarios en los que se han detectado dos planetas y ambos presentan TTVs.

a masas estelares calculadas a partir del radio estelar y la gravedad superficial.

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

c periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

d rangos de periodos TTVs calculados para masas planetarias de 0 a 13 MJ.

e masas estelares en las que, por falta de datos, se ha asumido un error de ± 0.1 .

En algunos casos, las masas de los planetas no habían sido publicadas por lo que se estimaron con *Forecaster*, tal como se comentó anteriormente. Sin embargo, debido a la gran diversidad de densidades planetarias, el rango de valores proporcionado por *Forecaster* es demasiado incierto. Es por esto que en algunos casos las masas estimadas por *Forecaster* se obviaron a la hora de calcular el rango de periodos de las TTVs compatible con la presencia de un troyano en L4 o L5. En estos casos, se ha calculado la masa planetaria necesaria para que el periodo de las TTVs publicado en la bibliografía coincida con el que cabría esperar por la presencia de un troyano con una masa de entre cero y la masa del planeta. Estos candidatos y las nuevas masas planetarias se recogen en la Tabla 4.8.

Es preciso destacar el caso de Kepler-59c, cuya masa está publicada pero con una cota superior, por lo que se produce el mismo caso en el que el rango teórico para el periodo de las TTVs compatible con la presencia de un troyano está acotado inferiormente. Por este motivo se ha procedido a calcular, de igual modo, la masa que debería tener este planeta para que sus TTVs se pudieran explicar por la presencia de un troyano.

Planeta	Periodo TTV medido [días]	Rango Periodo TTV teórico [días]	Masa planetaria [MJ]	Masa planetaria estimada [MJ]
Kepler-410Ab	$960.60^{+9.20}_{-9.20}$	$[47, +\infty]^d$	$0.025^{+0.021^b}_{-0.021}$	$0.044^{+0.012}_{-0.012}$
Kepler-71b	$9.65^{+0.03}_{-0.03}$	$[9, +\infty]^d$	$23^{+32^b}_{-32}$	$15.5^{+4.9}_{-4.9}$
Kepler-108c	881^{+56}_{-56}	$[495, +\infty]^d$	$8^{+19^b}_{-19}$	$5.95^{+0.25}_{-0.25}$
Kepler-136b	$39.97^{+0.32}_{-0.32}$	$[27, +\infty]^d$	$0.062^{+0.037}_{+0.033}$	$10.2^{+3.0}_{-3.0}$
Kepler-139c	1008^{+84}_{-84}	$[344, +\infty]^d$	$0.028^{+0.017^b}_{-0.017}$	$2.26^{+0.37}_{-0.37}$
Kepler-161c	280^{+3}_{-3}	$[12, +\infty]^d$	$0.037^{+0.033}_{-0.033}$	$0.0342^{+0.0094}_{-0.0094}$
Kepler-231c	$515.6^{+9.6}_{-9.6}$	$[26, +\infty]^d$	$0.076^{+0.042}_{-0.035}$	$0.04^{+0.01}_{-0.01}$
Kepler-103b	$264^{+3}_{-3}{}^{11}$	$[37, +\infty]^d$	$0.031^{+0.027}_{-0.027}$	$0.37^{+0.01}_{-0.01}$
Kepler-328b	$88^{+9^c}_{-9}$	$[61, +\infty]^d$	$0.090^{+0.041}_{-0.039}$	$13.8^{+4.1}_{-4.1}$
Kepler-415b	$12^{+1^c}_{-1}{}^{10}$	$[6, +\infty]^d$	$0.38^{+0.32}_{-0.27}$	$5.44^{+0.94}_{-0.94}$
Kepler-416b	$174^{+17^c}_{-17}$	$[13, +\infty]^d$	$0.18^{+0.17}_{-0.12}$	$0.115^{+0.029}_{-0.029}$
Kepler-417b	$35^{+4^c}_{-4}$	$[24, +\infty]^d$	$0.035^{+0.029}_{-0.025}$	$10.2^{+3.8}_{-3.8}$
Kepler-103c	$514^{+22}_{-22}{}^{11}$	$[417, +\infty]^d$	$0.114^{+0.079}_{-0.079}$	$12.3^{+1.0}_{-1.0}$
Kepler-415c	$42^{+4^c}_{-4}$	$[13, +\infty]^d$	$0.032^{+0.026^b}_{-0.026}$	$1.97^{+0.48}_{-0.48}$
Kepler-416c	$116^{+12^c}_{-12}$	$[25, +\infty]^d$	$0.027^{+0.017^b}_{-0.017}$	$0.99^{+0.28}_{-0.28}$
Kepler-417c	$36^{+4^c}_{-4}$	$[31, +\infty]^d$	$0.030^{+0.017^b}_{-0.017}$	$16.2^{+5.7}_{-5.7}$
Kepler-59c	$623.4^{+8.6}_{-8.6}$	$[165, +\infty]$	< 1.37 $0.018^{+0.016^b}_{-0.016}$	$0.070^{+0.018}_{-0.018}$

Tabla 4.8 Masas planetarias estimadas asumiendo la presencia de un troyano

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

c periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

d rangos de periodos TTVs calculados para masas planetarias de 0 a 13 MJ.

De los planetas recogidos en la Tabla 4.8, hay algunos casos en los que la masa, si bien viene dada con errores significativos, se había medido por velocidad radial por lo que se considera que la masa real del planeta no puede diferir en más de 3σ del valor dado. En estos casos, cuando se ha calculado una masa que fuera compatible con el hecho de que las TTVs estuvieran provocadas por un troyano, si estas diferían en más de 3σ se ha considerado que estos candidatos deben ser descartados pues las TTVs no se pueden explicar por la presencia de un troyano teniendo en cuenta la masa real del planeta. Participan de este caso Kepler- 328b (Szabó et al., 2013), Kepler-103b y Kepler-103c (Dumusque et al., 2014).

En el resto de casos las masas no han sido publicadas en la bibliografía, o han sido calculadas por el método TTVs (Mazeh et al., 2013). Es por este motivo que salvo los planetas cuya masa se había calculado por velocidad radial, el resto de planetas serán estudiados y se comprobará si las TTVs que presentan pueden ser ajustadas al modelo expuesto en el Capítulo 3, partiendo de las masas calculadas con *Forecaster*. De igual

modo, en los casos en los que las masas estelares no se habían publicado y se estimaron en base a sus radios, recogidas en la Tabla 4.1, no es posible descartar que las TTVs estén producidas por la presencia de un troyano, por lo que también se tendrán en cuenta y se comprobará si se pueden ajustar al modelo.

4.2 Aplicación del estudio teórico a las TTVs de los planetas seleccionados

En este apartado se comprobará si las TTVs de los planetas seleccionados pueden ajustarse al modelo descrito por las ecuaciones del Capítulo 3.

4.2.1 Estudio de los planetas en los que todos sus parámetros son conocidos.

Kepler-17b es el único candidato del que se conocen todos los datos de masas y parámetros orbitales. El periodo de las TTVs que presenta el planeta Kepler-17b es compatible con el que produciría un troyano en uno de sus puntos de Lagrange si se tiene en cuenta su masa, la masa de su estrella y el periodo orbital, tal como queda expuesto en la Tabla 4.4. El periodo de las TTVs ha sido publicado con dos valores distintos ($6.02^{+0.01}_{-0.01}$ días en Holczer et al. (2016) y $12.02^{+0.05}_{-0.05}$ días en Mazeh et al. (2013)) y esto es debido a que las TTVs de este planeta presentan diferentes componentes espectrales como se puede apreciar en la Figura 4.1 (Hadden & Lithwick, 2014).

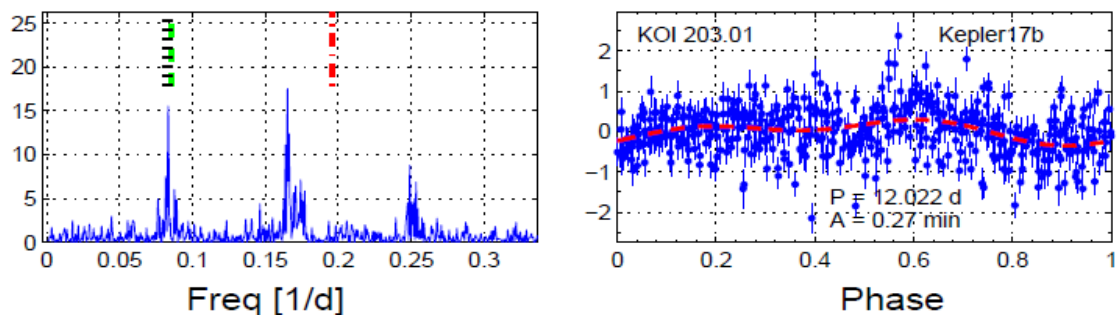


Figura 4.1 Espectro de potencia normalizada (izquierda) y curva de fase de Kepler-17b (derecha).

Los dos periodos de TTVs publicados son aproximadamente uno el doble que el otro ya que es una componente armónica, tal y como cabría esperar de las TTVs producidas por la presencia de un troyano (ver sección 3.4 donde se discuten las componentes espectrales de las TTVs producidas por un troyano en configuración *tadpole*). Sin embargo, este periodo fundamental coincide con el periodo de rotación de la estrella anfitriona (Van Eylen & Albrecht, 2015). Este último dato podría suponer que estas TTVs no estarían relacionadas con la presencia de un troyano. Sin embargo no se debe descartar esta posibilidad por lo que se requiere un análisis más profundo de los tránsitos de Kepler-17b que tenga en cuenta la actividad estelar y desacople la

contribución de la actividad estelar a la curva de luz por ejemplo, teniendo en cuenta las manchas estelares en el ajuste. De esta forma se podrían estudiar las TTVs, ya sin la contribución de la actividad estelar, y determinar con mayor grado de confianza si pueden estar debidas a las interacciones gravitacionales con un troyano. Dicha componente de actividad estelar se puede analizar utilizando la herramienta SOAP 2.0 (Dumusque et al., 2014), que permite estudiar los efectos de la actividad estelar de rotación y manchas estelares sobre los datos de velocidad radial y fotometría. Este análisis, sin embargo, queda fuera de los objetivos de este Trabajo Fin de Máster. Sin embargo, este candidato será estudiado más a fondo en posteriores trabajos del proyecto TROY con el fin de completar el análisis de sus TTVs para discernir entre actividad estelar e interacción gravitatoria con objetos coorbitales.

A continuación, se asumirá la posibilidad de que esta periodicidad de las TTVs sea producida por un objeto coorbital, tratando de modelar estas variaciones mediante las ecuaciones expuestas en el Capítulo 3.

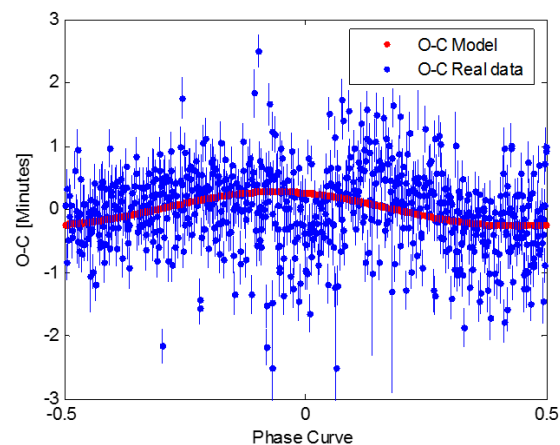


Figura 4.2 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler-17b.

En base a la experiencia adquirida en la sección 3.4 dónde se han estudiado los efectos de los distintos parámetros sobre la forma de las TTVs, se ha realizado un ajuste de mínimos cuadrados para obtener dichos parámetros, recogidos en la Tabla 4.9.

De acuerdo a este ajuste, los datos de TTVs obtenidos de la literatura son compatibles con la presencia de un planeta coorbital de 4.72 veces la masa de la Tierra con una libración alrededor de L4 de amplitud 8° .

Planeta	Periodo TTV medido [días]	Amplitud TTV medida [min]	Masa planetaria [MJ]	Masa del troyano [MT]	Amplitud de libración [°]	χ^2_{red}
Kepler-17b	$12.02^{+0.05}_{-0.05}$ ¹⁰	0.27 ¹⁰	$0.044^{+0.012}_{-0.012}$	4.72	8	217.79

Tabla 4.9 Parámetros del modelo para el ajuste a la curva de fase de Kepler-17b

4.2.2 Estudio de los planetas en los que se desconoce la masa planetaria.

A continuación, se estudiarán los sistemas validados para los que hemos tenido que estimar la masa del planeta con *Forecaster* en base a su radio determinado a través del tránsito.

En estos casos se tiene una cota inferior para el rango del periodo de las TTVs que debería tener para que sus variaciones de tránsito puedan ser compatibles con las que provocarían las interacciones gravitatorias con un troyano. En la Tabla 4.10 se recogen estos planetas, con los parámetros que se han derivado del ajuste.

Planeta	Periodo TTV medido [días]	Amplitud TTV medida [min]	Masa planetaria estimada [MJ]	Masa planetaria del ajuste [MJ]	Masa del troyano [MT]	Amplitud de libración [°]	X^2_{red}
Kepler-410Ab	$960.6^{+9.2}_{-9.2}$	$15.59^{+0.49}_{-0.49}$	$0.044^{+0.012}_{-0.012}$	0.063	0.67	7.16	85.21
Kepler-71b	$9.65^{+0.03}_{-0.03}$	$0.344^{+0.053}_{-0.053}$	$15.5^{+4.3}_{-4.3}$	12.96	3744	0.046	116.87
Kepler-108c	881^{+56}_{-56}	$10.7^{+2.7}_{-2.7}$	$5.95^{+0.25}_{-0.25}$	9.74	101.76	0.44	0.25
Kepler-136b	$39.97^{+0.32}_{-0.32}$	$21.7^{+1.5}_{-1.5}$	$10.2^{+3.0}_{-3.0}$	11.30	4.52	1.66	6.14
Kepler-139c	1008^{+84}_{-84}	$28.6^{+8.4}_{-8.4}$	$2.26^{+0.37}_{-0.37}$	3.4	216.12	0.27	2.57
Kepler-161c	280^{+3}_{-3}	$7.98^{+0.98}_{-0.98}$	$0.0342^{+0.0094}_{-0.0094}$	0.074	0.95	9.40	2.25
Kepler-231c	$515.6^{+9.6}_{-9.6}$	$20.9^{+2.5}_{-2.5}$	$0.04^{+0.01}_{-0.01}$	0.076	15.57	0.69	4.91
Kepler-415b	$12^{+1c}_{-1} 10$	$57.2^{+5.7c}_{-5.7}$	$5.44^{+0.94}_{-0.94}$	9.16	1163.26	13.30	5.94
Kepler-416b	174^{+17c}_{-17}	$13.4^{+1.3c}_{-1.3}$	$0.115^{+0.029}_{-0.029}$	1.67	17.80	9.15	5.79
Kepler-417b	35^{+4c}_{-4}	$21.4^{+2.1c}_{-2.1}$	$10.2^{+3.8}_{-3.8}$	11.77	1872.02	1.32	3.09
Kepler-415c	42^{+4c}_{-4}	$25.3^{+2.5c}_{-2.5}$	$1.97^{+0.48}_{-0.48}$	4.15	111.24	10.3	4.33
Kepler-416c	116^{+12c}_{-12}	$10.4^{+1.0c}_{-1.0}$	$0.99^{+0.28}_{-0.28}$	1.29	136.67	0.86	4.35
Kepler-417c	36^{+4c}_{-4}	$30.3^{+3.0c}_{-3.0}$	$16.2^{+5.8}_{-5.8}$	9.40	5978	0.79	5.81
Kepler-59c	$623.4^{+8.6}_{-8.6}$	$84^{+6.7}_{-6.7}$	$0.070^{+0.018}_{-0.018}$	0.13	1.65	47	1.90

Tabla 4.10 Parámetros de ajuste a la curva de fase de diferentes planetas *c* periodos de las TTVs calculados mediante un análisis de Fourier.

A continuación se mostrarán algunos casos de interés, realizando un breve análisis de cada uno de ellos. Sin embargo en el Anexo III adjunto a la memoria se incluyen todas las gráficas de ajuste del resto de sistemas.

Kepler-410Ab

En el momento de redacción de esta memoria, el sistema planetario Kepler-410A, forma parte de aquellos sistemas planetarios en los que se ha descubierto tan solo un planeta, Kepler-410Ab. Es por esto que estudiar las TTVs que presenta este planeta puede resultar interesante pues se desconoce el origen de las mismas, que podrían estar producidas por un compañero coorbital o quizás por un planeta hasta ahora no

detectado, entre otros escenarios. Es preciso comentar que este Kepler-410Ab se encuentra en un sistema cuya estrella es binaria aunque este planeta tan solo orbita entorno a Kepler-410A. Sin embargo se ha visto que las TTVs no se pueden explicar por la interacción gravitatoria con Kepler-410B (Xie, 2014), por lo que estudiar el origen de estas variaciones en el tiempo de tránsito sigue siendo interesante en el contexto del proyecto TROY.

El radio de este planeta determinado por tránsitos es de 2.8 masas terrestres, aunque su masa aún no ha sido determinada. Sin embargo, dado que su radio es relativamente pequeño, herramientas como *Forecaster* pueden estimar su masa con cierta precisión, siendo en este caso de $0.044^{+0.012}_{-0.012}$ masas de Júpiter. Dentro del rango de 3σ de la masa estimada con *Forecaster*, se ha calculado la masa que debería tener este planeta para que sus TTVs, ajustadas en la Figura 4.3, sean compatibles con las que provocaría un troyano de una masa de 0.67 la masas de la Tierra, y se ha resuelto que la masa planetaria debe de ser unas 1.43 veces más que lo estimado con *Forecaster*, algo que está dentro de los márgenes de error de la herramienta. Es por esto que un estudio de la masa del planeta por medio de velocidad radial resultaría verdaderamente interesante, pues podría arrojar luz sobre la estructura de este sistema planetario, revelando la masa de este planeta y ayudando a despejar las incógnitas que aun impiden afirmar con rotundidad la existencia de un compañero coorbital.

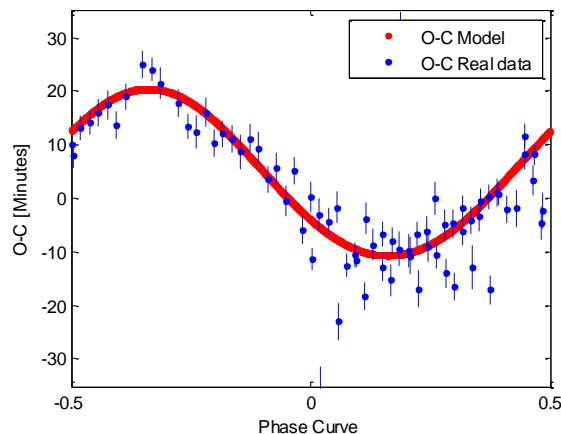


Figura 4.3 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler-410Ab.

Kepler-161c

El sistema planetario Kepler-161 está formado por dos planetas que transitan. Sin embargo, Kepler-161b no presenta TTVs periódicas tal como se muestra en la figura 4.5 por lo que no cabe la posibilidad de que las TTVs de estos dos planetas puedan estar anticorrelacionadas. Las masas, calculadas por el método de las TTVs (Hadden &

Lithwick, 2014), parecen ser muy similares por lo que no sería del todo comprensible que uno de los planetas presentara TTVs tan significativas y el otro no. Sin embargo, es preciso comentar que sin un análisis de velocidad radial, el cálculo de masas a través de TTVs puede caer en errores si precisamente existe un compañero coorbital.

Por esto último se han estudiado las TTVs de Kepler-161c y se ha encontrado que se podrían ajustar perfectamente con las que provocaría un troyano con la masa de la Tierra.

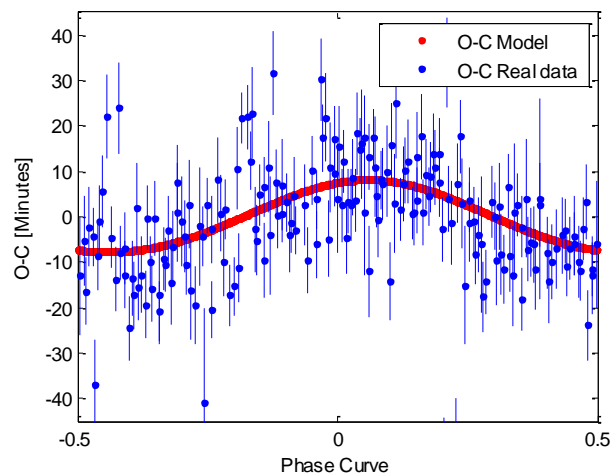


Figura 4.4 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler-161c.

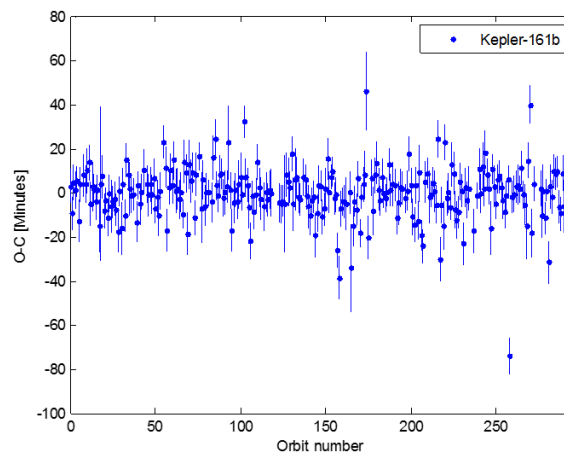


Figura 4.5 Las TTVs de Kepler161b no presentan ninguna periodicidad.

Por último resulta interesante comentar que Kepler-161c es el planeta externo del sistema por lo que un tercer planeta, hasta ahora no descubierto, podría estar provocando estas perturbaciones. De nuevo, se requiere un estudio de velocidades radiales para calcular con precisión las masas de los planetas de este sistema y acotar las diversas posibilidades.

Kepler-59c

El sistema planetario Kepler-59 está formado por dos planetas que transitan y que presentan TTVs no anticorrelacionadas, por lo que las variaciones del tiempo de tránsito de uno no pueden ser explicadas por las interacciones gravitacionales con el otro. Por otro lado, el periodo que presentan las TTVs de Kepler-59b no es compatible con la presencia de un troyano, mientras que las TTVs de Kepler-59c sí.

La masa de estos planetas está dada con una cota superior, así que se ha calculado la masa que debería tener Kepler-59c para que sus TTVs, ajustadas en la Figura 4.6, se pudieran explicar por la interacción gravitatoria con un troyano y se ha encontrado que la masa está dentro de las cotas dadas.

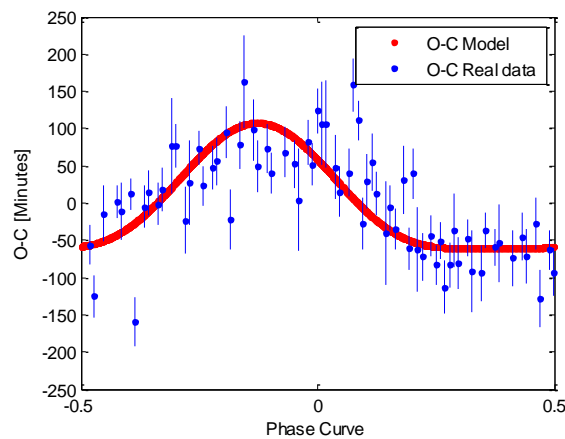


Figura 4.6 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler-59c.

Las TTVs de Kepler-59c se han ajustado a las que provocaría un troyano de masa de 1.7 masas terrestres con una amplitud de libración considerable. Es preciso comentar que la amplitud de libración provoca una deformación de las TTVs, haciendo que dejen de parecerse a una senoide, achatándolas por las crestas inferiores, tal como se puede apreciar en la Figura 4.7.

Se ha encontrado que durante el proceso de ajuste de la amplitud de las TTVs se ha tenido que aumentar la amplitud de libración del troyano hasta los 47° , haciendo que esto a su vez haga que se ajuste también en la propia forma achatada que cabría esperar de las TTVs provocadas por un troyano con gran amplitud de libración.

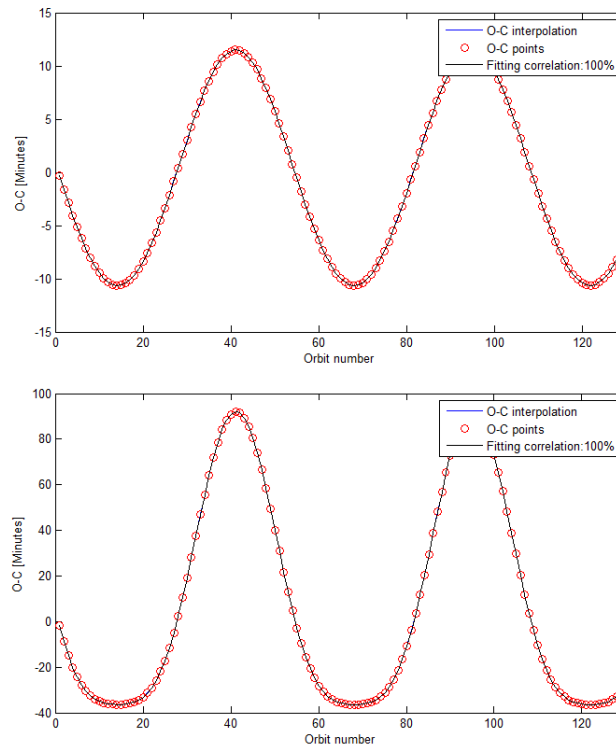


Figura 4.7 Forma de las TTVs para una amplitud de libración de 5° (panel superior) y de 40° (panel inferior).

Es por todo esto que se considera que si bien las TTVs podrían estar causadas por un tercer planeta o por otra causa. Con los datos de los que se dispone, la hipótesis de que Kepler-59c tenga un compañero coorbital es igualmente válida.

4.2.3 Estudio de los planetas en los que se desconocen las masas del planeta y de la estrella.

Por último se procede al ajuste del modelo teórico estudiado de las TTVs de aquellos planetas de los que se desconoce tanto la masa de su estrella como la masa del propio planeta.

Se ha procedido manteniendo la masa estelar en su valor medio determinado a partir de la gravedad superficial y el radio, y se ha variado la masa del planeta para realizar el ajuste. Los parámetros empleados para el ajuste se recogen en la Tabla 4.11, y en el Anexo III se muestran todas las curvas de fase con el ajuste.

En algunos casos, como en el de Kepler-160c, el modelo teórico se puede ajustar bastante bien a las TTVs que presentan los planetas, incluso sin variar la masa del planeta demasiado respecto a lo que se había estimado con *Forecaster*.

Planeta	Periodo TTV medido [días]	Amplitud TTV medida [min]	Masa planetaria [MJ]	Masa planetaria del ajuste [MJ]	Masa del troyano [MT]	Amplitud de libración [°]	χ^2_{red} del ajuste
Kepler-160c	879^{+12}_{-12}	$20.4^{+1.3}_{-1.3}$	$0.044^{+0.037^b}_{-0.037}$	0.034	0.35	12.75	2.73
Kepler-230b	1248^{+21}_{-21}	$57.8^{+2.9}_{-2.9}$	$0.33^{+2.7^b}_{-2.7}$	0.086	0.92	15.56	20.42
Kepler-309c	1410^{+180}_{-180}	$18.5^{+6.4}_{-6.4}$	$0.037^{+0.027^b}_{-0.027}$	0.43	5.40	1.35	0.46
Kepler-397c	757^{+19}_{-19}	$20.6^{+3.2}_{-3.2}$	$1.0^{+7.3^b}_{-7.3}$	3.77	41.32	1.19	5.46
Kepler-405c	791^{+44}_{-44}	$24.7^{+8.5}_{-8.5}$	$0.053^{+0.041^b}_{-0.041}$	0.21	2.19	6.85	4.60
Kepler-195b	559^{+16}_{-16}	$9.1^{+1.3}_{-1.3}$	$0.022^{+0.013^b}_{-0.013}$	0.022	2.38	1.11	3.56
Kepler-209c	1061^{+76}_{-76}	$9.2^{+2.4}_{-2.4}$	$0.035^{+0.021^b}_{-0.021}$	0.20	5.09	0.78	3.41
Kepler-210c	738^{+18}_{-18}	$2.04^{+0.23}_{-0.23}$	$0.077^{+0.059^b}_{-0.059}$	0.0096	0.10	2.0	35.50
Kepler-312c	471^{+17}_{-17}	$6.1^{+1.8}_{-1.8}$	$0.028^{+0.014^b}_{-0.014}$	0.32	3.50	2.45	4.92
Kepler-159b	$58^{+6^c}_{-6}$	$6.3^{+0.6}_{-0.6}$	$0.029^{+0.022^b}_{-0.022}$	2.37	34.96	3.6	604.92
Kepler-111c	2213^{+79}_{-79}	211^{+22}_{-22}	$8^{+21^b}_{-21}$	1.71	10.91	3	996.28
Kepler-278c	829^{+41}_{-41} 464^{11}	144^{+32}_{-32} 88.5	$0.034^{+0.028^b}_{-0.028}$	0.80 2.54	8.58 38.14	22.7 10.58	4.57 7.40
Kepler-199c	226^c	$5.6^{+0.6}_{-0.6}$	$0.038^{+0.027^b}_{-0.027}$	11.76	511.71	0.168	1.50

Tabla 4.11 Parámetros de ajuste a la curva de fase de diferentes planetas

b masas planetarias estimadas con el software *Forecaster*.

A pesar de esto, el desconocimiento tanto de las masas planetarias como de las masas estelares hace que estos casos estén sujetos a un gran número parámetros libres por lo que se requiere un análisis detallado de las masas de estos sistemas si se quiere establecer una propuesta sobre cuáles de estos son candidatos firmes a albergar un compañero coorbital, aunque el ajuste aquí realizado es un punto de partida que puede resultar de interés.

En esta sección se ha aplicado el estudio teórico desarrollado en el Capítulo 3 a los candidatos seleccionados en el Capítulo 4. Se han expuesto casos como el de Kepler17b o el de Kepler410Ab que si bien por falta de datos no pueden ser presentados como firmes candidatos a tener un compañero coorbital, representan casos de estudio valiosos en el contexto del proyecto TROY.

5.- Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones

En el presente Trabajo Fin de Máster se han aplicado los conocimientos adquiridos en diferentes asignaturas del título como pueden ser *Astronomía Clásica e Instrumentación astronómica*, *Sistema Solar*, *Exoplanetas y Astrobiología*, *Astrofísica Estelar* y *Bases de Datos: el Observatorio Virtual*, para plantear y estudiar un problema actual en el paradigma de la astronomía y la astrofísica como es la detección de cuerpos menores y planetas en sistemas extrasolares.

Se ha profundizado en este tema desde el estudio teórico de nuevos conceptos y ecuaciones de movimiento orbital, como en el estudio de los posibles métodos de detección recogidos en la bibliografía.

Para el desarrollo de estas tareas se han programado los algoritmos necesarios para realizar gráficas y estudiar detalladamente cómo afecta cada parámetro físico y orbital del sistema planetario a las TTVs de un planeta acompañado por un troyano.

Tras realizar la aplicación del estudio teórico a los candidatos, se han expuesto los resultados más relevantes y estableciendo diferentes hipótesis, recogiendo en esta memoria utilizando vocabulario específico adquirido durante el máster y durante el proceso de investigación de este Trabajo Fin de Máster.

Atendiendo a los objetivos específicos expuestos en el Capítulo 1 se expone que:

1. Se ha elaborado una primera lista con 89 planetas a estudiar, y se han seleccionado aquellos cuyas TTVs no estaban anticorrelacionadas ni podrían explicarse por otro motivo como la presencia de un planeta no transitable.
2. Se ha realizado un estudio teórico de la forma de las TTVs así como de las influencias tanto cuantitativas como cualitativas de los diferentes parámetros físicos y geométricos por los que se ven determinadas. De esta forma se han establecido criterios que pueden servir para presentar planetas candidatos a tener compañeros coorbitales y que se pueden proponer para su estudio con los métodos de detección de troyanos con los que trabajan los investigadores del proyecto TROY, como la combinación del método de velocidad radial y el método del tránsito.
3. Dicho estudio teórico se ha aplicado a cada uno de los candidatos, exponiendo los casos de mayor interés.
4. En base a lo anterior se han elaborado hipótesis que puedan explicar sus TTVs y conclusiones así como posibles trabajos futuros, expuestos en esta memoria.

Todo lo anteriormente expuesto ha servido para demostrar que en casos como el de Kepler410Ab o el de Kepler161c, si bien el origen de sus TTVs podría estar relacionado con la presencia de un segundo planeta, también podrían deberse a la presencia de un compañero coorbital en configuración *tadpole*.

5.2 Trabajos Futuros

Tal y como se comenta en el segundo capítulo de la presente memoria, se han elegido aquellos sistemas planetarios en los que hubiera tan solo uno o dos planetas confirmados y que tuvieran variaciones en el tiempo de tránsito. Un aspecto interesante podría ser extrapolar este mismo trabajo a aquellos sistemas con más planetas ya que, si bien su dinámica es más compleja, mediante técnicas de análisis frecuencial se podrían encontrar planetas con TTVs compatibles con la presencia de compañeros coorbitales en configuración *tadpole* y expandirlo, además, a la configuración orbital *horseshoe*.

Por otro lado, algunas de las masas planetarias publicadas, habían sido calculadas por el método de las TTVs (Hadden & Lithwick, 2014), de forma que se podrían haber inducido errores precisamente por la presencia de los compañeros coorbitales que las están provocando. Se ha visto también que en no pocos casos, la masa estelar y planetaria no se había publicado o al menos no con la suficiente precisión, siendo parámetros físicos cuya determinación es fundamental para la detección de compañeros coorbitales.

Es por estos anteriores motivos que un estudio completo de estos sistemas que incluya la determinación de sus masas mediante velocidad radial sería recomendable con el fin de avanzar en el campo de la detección de troyanos por el método de las TTVs.

Se encontró también el caso de Kepler-17b, un planeta cuya masa se conoce con precisión además del resto de parámetros físicos y orbitales, y que se ha presentado como un candidato interesante. Sin embargo las TTVs observadas podrían estar provocadas parcial o completamente por la actividad de su estrella anfitriona por lo que, tal como se expone en el Capítulo 4, se ha propuesto un análisis detallado de dicha actividad con el fin de descartar o confirmar el origen de estas TTVs.

Por último comentar que sería interesante repetir este mismo estudio, sobre todo lo relativo al Capítulo 4 una vez se descubran más planetas en futuras misiones como la *James Webb Space Telescope*, *TESS* o *Plato*.

6.- Referencias bibliográficas

- Borucki, Koch, Basri, Batalha, Brown, Caldwell, ... Geary, John C. (2010). Kepler Planet-Detection Mission: Introduction and First Results. *Science*, 327(5968), 977-.
- Chen, & Kipping. (2016). Probabilistic Forecasting of the Masses and Radii of Other Worlds. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/834/1/17>
- Ciceri, Lillo-Box, Southworth, Mancini, Henning, & Barrado. (2006). Kepler-432 b: a massive planet in a highly eccentric orbit transiting a red giant? *Astronomy & Astrophysics*, 58, 55–58.
- Connors. (2011). Earth's Trojan asteroid. *Nature*, 475, 481–483.
- Dotto. (2008). Asteroids, Comets, Meteors (2008) 8112.pdf, 8732.
- Dumusque, Boisse, & Santos. (2014). Soap 2.0: a Tool To Estimate the Photometric and Radial Velocity Variations Induced By Stellar Spots and Plages. *The Astrophysical Journal*, 796(2), 132. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/796/2/132>
- Dym. (1985). *Fourier series and integrals* (Academic P). New York.
- Euler. (1767). Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum.
- Fabrycky, Ford, Steffen, Rowe, Carter, Moorhead, ... Shporer. (2012). TRANSIT TIMING OBSERVATIONS FROM *KEPLER* . IV. CONFIRMATION OF FOUR MULTIPLE-PLANET SYSTEMS BY SIMPLE PHYSICAL MODELS. *The Astrophysical Journal*, 750(2), 114. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/750/2/114>
- Ford, & Gaudi. (2006). Observational Constraints on Trojans of Transiting Extrasolar Planets. *The Astrophysical Journal*, 652, L137. <https://doi.org/10.1086/510235>
- Gajdoš, Parimucha, Hambálek, & Vaňko. (2017). Transit-timing variations in the system Kepler-410Ab. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 469(3), 2907–2912. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx963>
- Gascheau. (1843). Examen d'une classe d'equations differentielles et application a un cas particulier du probleme des trois corps. *C. R. Acad. Sci.*, 16.
- Gillon, Triaud, Demory, Jehin, Agol, Deck, ... Queloz. (2017). Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1. *Nature*, 542(7642), 456–460. <https://doi.org/10.1038/nature21360>

- Hadden, & Lithwick. (2014). DENSITIES AND ECCENTRICITIES OF 139 *KEPLER* PLANETS FROM TRANSIT TIME VARIATIONS. *The Astrophysical Journal*, 787(1), 80. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/787/1/80>
- Haghighipour, Capen, & Hinse. (2013). Detection of Earth-mass and super-Earth Trojan planets using transit timing variation method. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117(1), 75–89. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9510-y>
- Hippke, & Angerhausen. (2015). A statistical search for a population of Exo-Trojans in the Kepler dataset, 5(1998). <https://doi.org/10.1088/0004-637X/811/1/1>
- Holczer, Mazeh, Nachmani, Jontof-Hutter, Ford, Fabrycky, ... Steffen. (2016). TRANSIT TIMING OBSERVATIONS FROM *KEPLER*. IX. CATALOG OF THE FULL LONG-CADENCE DATA SET. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 225(1), 9. <https://doi.org/10.3847/0067-0049/225/1/9>
- Hoyer, Palle, Dragomir, & Murgas. (2016). Ruling out the orbital decay of the WASP-43b. *The Astronomical Journal*, 151(6), 1–8. <https://doi.org/10.3847/0004-6256/151/6/137>
- Jiang, Lai, Savushkin, Mkrtychian, Antonyuk, Griv, ... Yeh. (2016). THE POSSIBLE ORBITAL DECAY AND TRANSIT TIMING VARIATIONS OF THE PLANET WASP-43b. *The Astronomical Journal*, 151(1), 17. <https://doi.org/10.3847/0004-6256/151/1/17>
- Kipping. (2009). Transit timing effects due to an exomoon - II. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396(3), 1797–1804. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14869.x>
- Lagrange. (1772). Essay on the three-body problem.
- Leleu, A., Robutel, Correia, & Lillo-Box. (2017). Detection of co-orbital planets by combining transit and radial-velocity measurements. *Astronomy & Astrophysics*, 599(30073), L7. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201630073>
- Leleu, Adrien., Robutel, & Correia. (2015). Detectability of quasi-circular co-orbital planets. Application to the radial velocity technique, 128(2009), 1–15. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526175>
- Leleu et Al. (2017). Paper still in preparation.
- Lillo-Box, Barrado, Figueira, Leleu, Santos, Correia, ... Faria. (2017). The TROY project:

- Searching for co-orbital bodies to known planets. I. Project goals and first results from archival radial velocity, (2005), 1–18. Retrieved from <http://arxiv.org/abs/1710.01138>
- Marchis. (2014). The Puzzling Mutual Orbit Of The Binary Trojan Asteroid (624) Hektor. *The Astrophysical Journal*, 783(2), L37. <https://doi.org/10.1088/2041-8205/783/2/L37>
- Marcy, Isaacson, Howard, Rowe, Jenkins, Bryson, ... Barrado. (2014). Masses, Radii, and Orbits of Small Kepler Planets: The Transition from Gaseous to Rocky Planets, 20. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/210/2/20>
- Mayor, & Queloz. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, 378, 355.
- Mazeh, Nachmani, Holczer, Fabrycky, Ford, Sanchis-Ojeda, ... Welsh. (2013). TRANSIT TIMING OBSERVATIONS FROM *KEPLER*. VIII. CATALOG OF TRANSIT TIMING MEASUREMENTS OF THE FIRST TWELVE QUARTERS. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2), 16. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/16>
- Nesvorný, Kipping, Terrell, Hartman, Bakos, & Buchhave. (2013). Koi-142, the King of Transit Variations, Is a Pair of Planets Near the 2:1 Resonance. *The Astrophysical Journal*, 777(1), 3. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/777/1/3>
- Payne, & Ford. (2011). an Analysis of Jitter and Transit Timing Variations in the Hat-P-13 System. *The Astrophysical Journal*, 729(2), 98. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/729/2/98>
- Rowe, Bryson, Marcy, Lissauer, Jontof-Hutter, Mullally, ... Geary. (2014). VALIDATION OF *KEPLER*'S MULTIPLE PLANET CANDIDATES. III. LIGHT CURVE ANALYSIS AND ANNOUNCEMENT OF HUNDREDS OF NEW MULTI-PLANET SYSTEMS. *The Astrophysical Journal*, 784(1), 45. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/784/1/45>
- Steffen, Gaudi, Ford, Agol, & Holman. (2007). Detecting and Characterizing Planetary Systems with Transit Timing.
- Street, Pollacco, Fitzsimmons, & Keenan. (2003). SuperWASP : Wide Angle Search for Planets, 294, 405–408.
- Szabó, Szabó, Dályá, Simon, Hodosán, & Kiss. (2013). Multiple planets or exomoons in

Kepler hot Jupiter systems with transit timing variations? *Astronomy & Astrophysics*, 553, A17. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220132>

Tricia Talbert. (2016, May). Briefing Materials: 1,284 Newly Validated Kepler Planets. NASA. Retrieved from www.nasa.gov/feature/ames/kepler/briefingmaterials160510

Van Eylen, & Albrecht. (2015). Eccentricity from transit photometry: small planets in Kepler multi-planet systems have low eccentricities. *The Astrophysical Journal*, 808(2), 126. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/808/2/126>

Vokrouhlický, & Nesvorný. (2014). Transit Timing Variations for Planets Co-Orbiting in the Horseshoe Regime. *The Astrophysical Journal*, 791(2002), 6. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/791/1/6>

Xie. (2013). Transit Timing Variation of Near-Resonant KOI Pairs: Confirmation of 12 Multiple Planet Systems. *The Astrophysical Journal*, (2013), 17. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/22>

Xie. (2014). Transit Timing Variation of Near-Resonance Planetary Pairs. II. Confirmation of 30 Planets in 15 Multiple-Planet Systems. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 210(2), 25. <https://doi.org/10.1088/0067-0049/210/2/25>

Yoshida, & Terai. (2017). Small Jupiter Trojans Survey with the Subaru/Hyper Suprime-Cam. *The Astronomical Journal*, 154(2), 71. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa7d03>

Anexo I: Representación gráfica de TTVs del grupo 2cd

En este anexo se recogen las gráficas de TTVs de aquellos candidatos del grupo 2cd, 23 sistemas con dos planetas detectados y que ambos presentan TTVs. Algunas han sido tomadas directamente de sus correspondientes fuentes bibliográficas y otras se han construido a partir de los datos facilitados por dichas fuentes. El objeto de representar gráficamente estas TTVs es mostrar aquellos casos en los que exista una clara anticorrrelación entre las TTVs de dos planetas situados en el mismo sistema planetario como es el caso del sistema Kepler128.

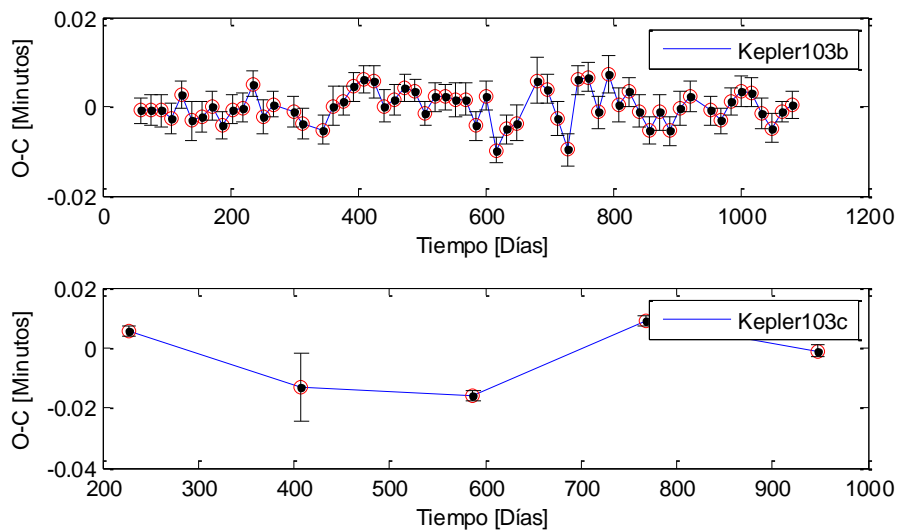


Figura AI.1 TTVs en el sistema planetario Kepler103 (Rowe et al., 2014).

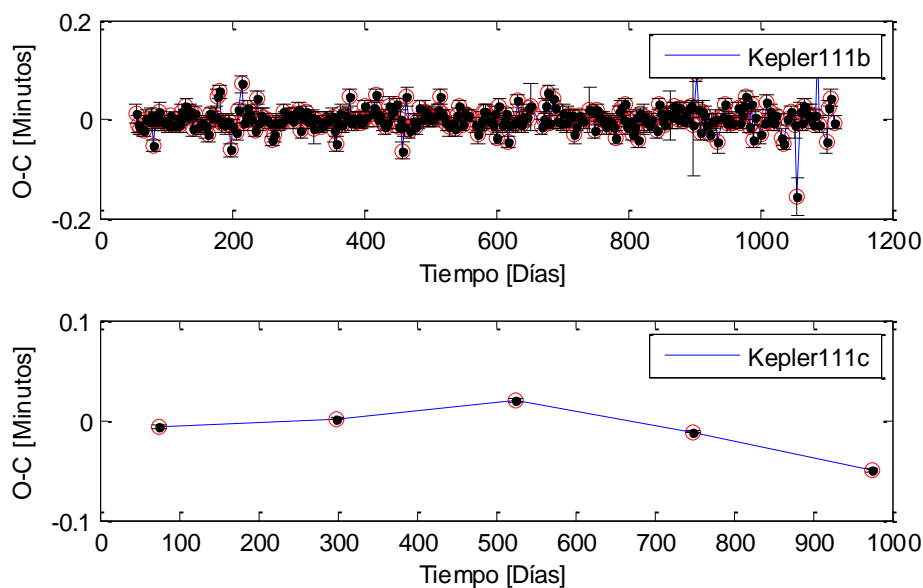


Figura AI.2 TTVs en el sistema planetario Kepler111 (Fabrycky et al., 2012).

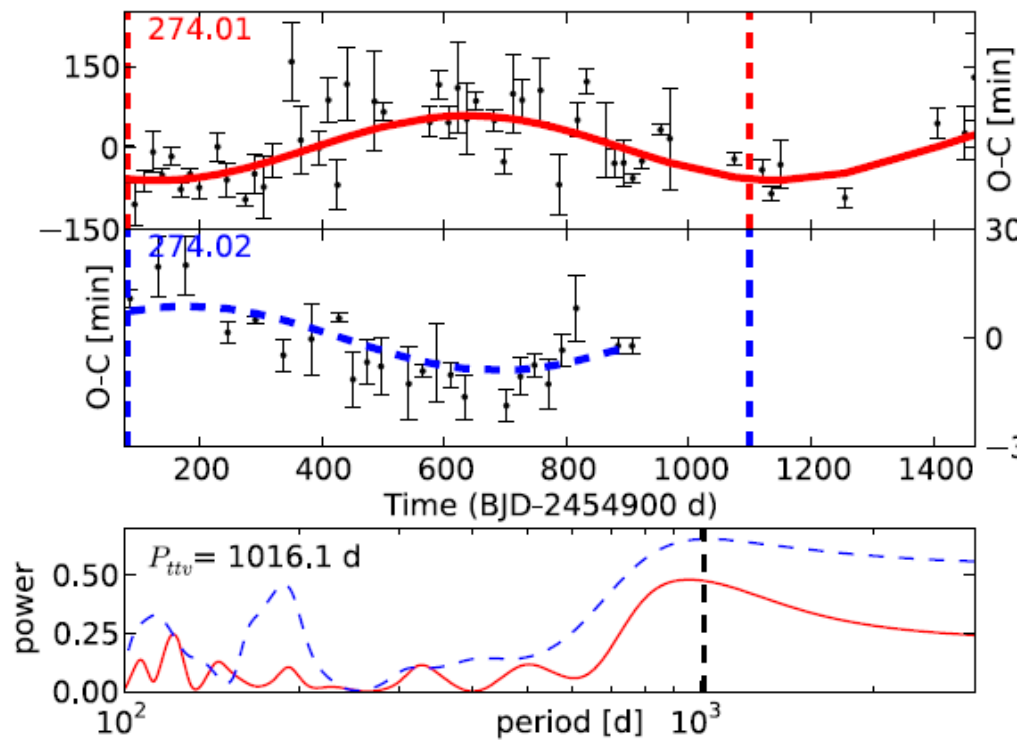


Figura A1.3 TTVs en el sistema planetario Kepler128 (Rowe et al., 2014).

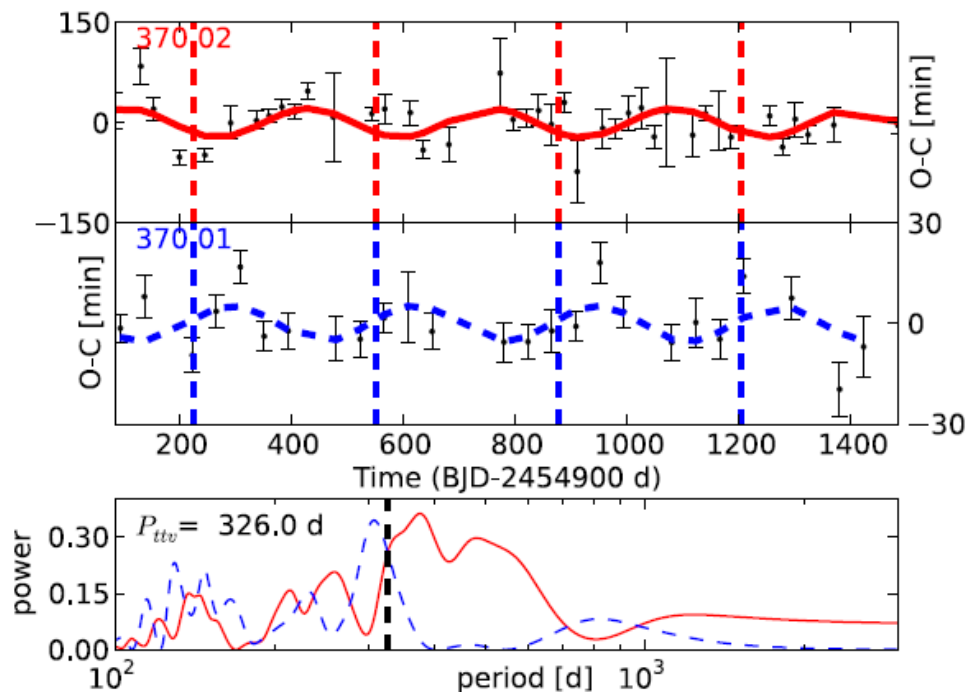


Figura A1.4 TTVs en el sistema planetario Kepler145 (Xie, 2014).

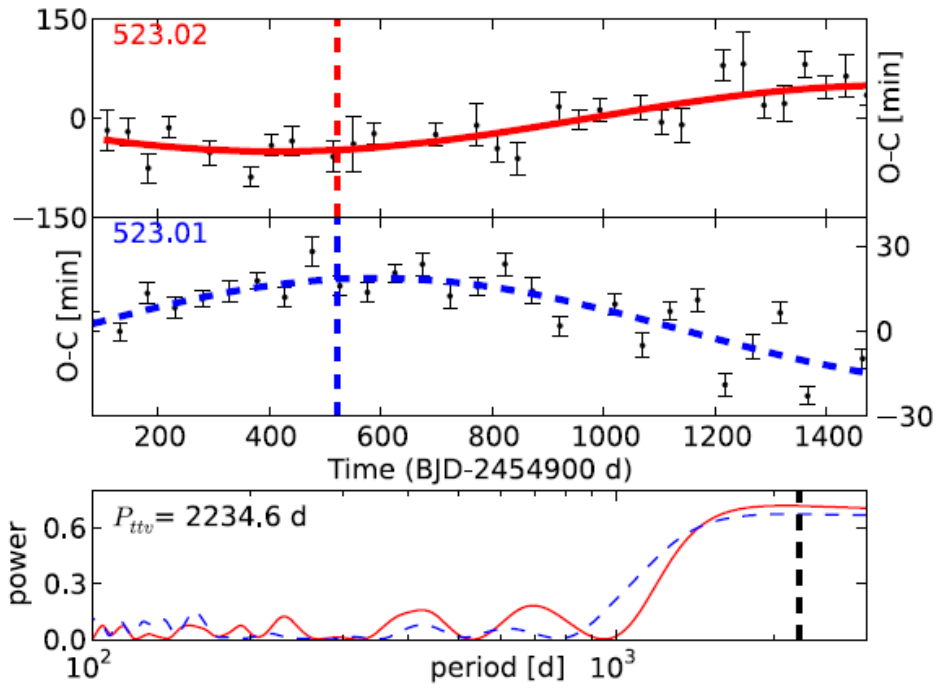


Figura A1.5 TTVs en el sistema planetario Kepler177 (Holczer et al., 2016).

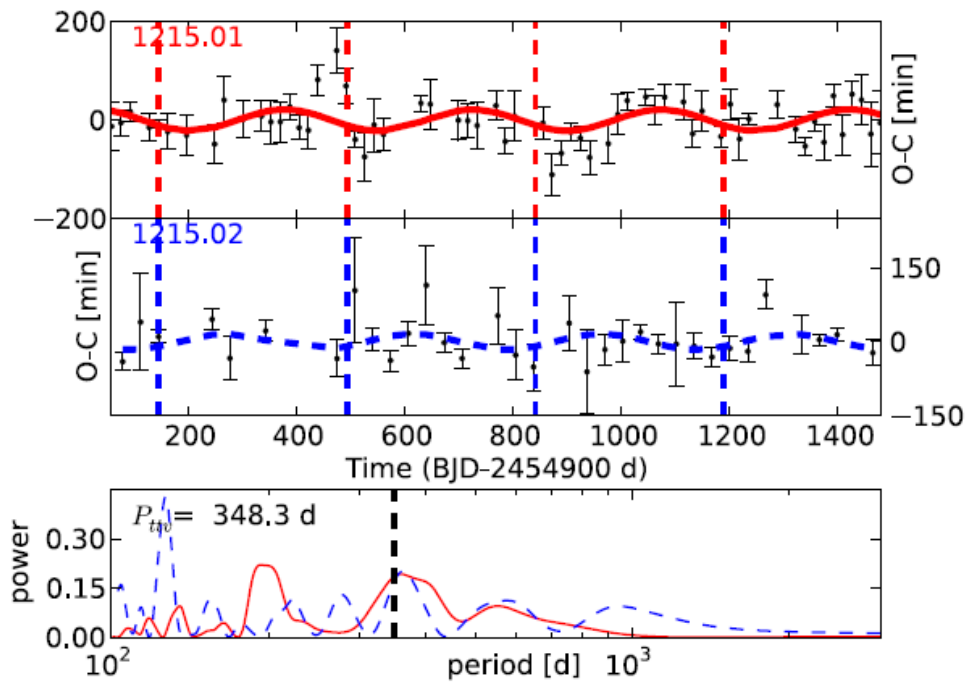


Figura A1.6 TTVs en el sistema planetario Kepler277 (Holczer et al., 2016).

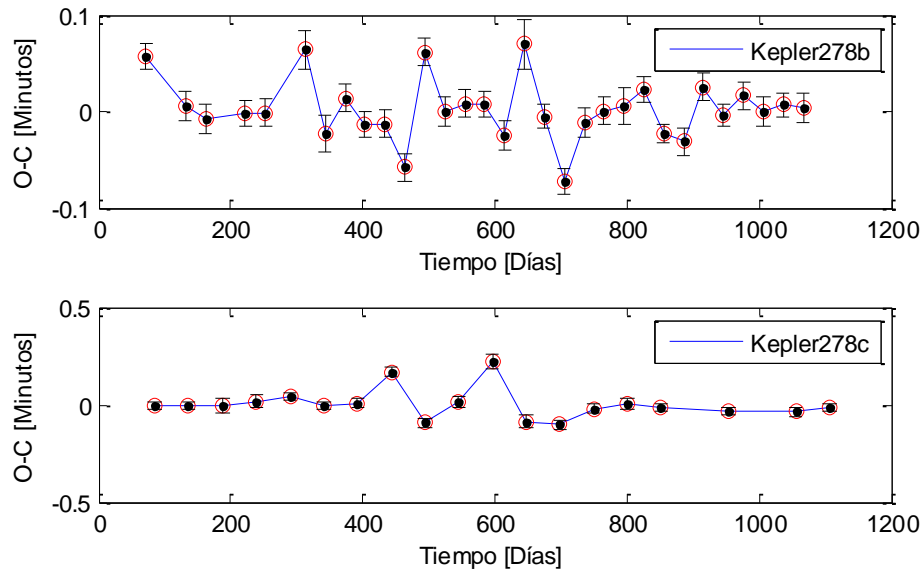


Figura A1.7 TTVs en el sistema planetario Kepler278 (Holczer et al., 2016).

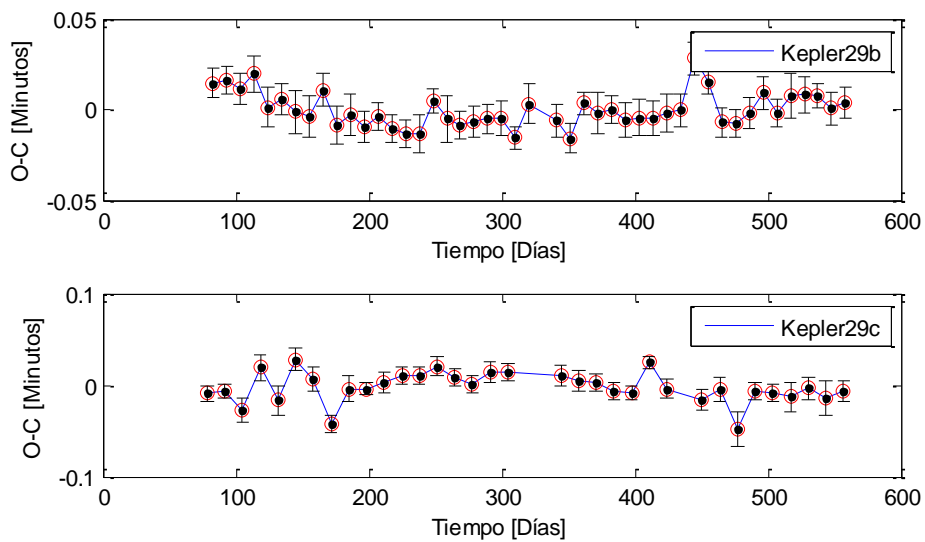


Figura A1.8 TTVs en el sistema planetario Kepler29 (Holczer et al., 2016).

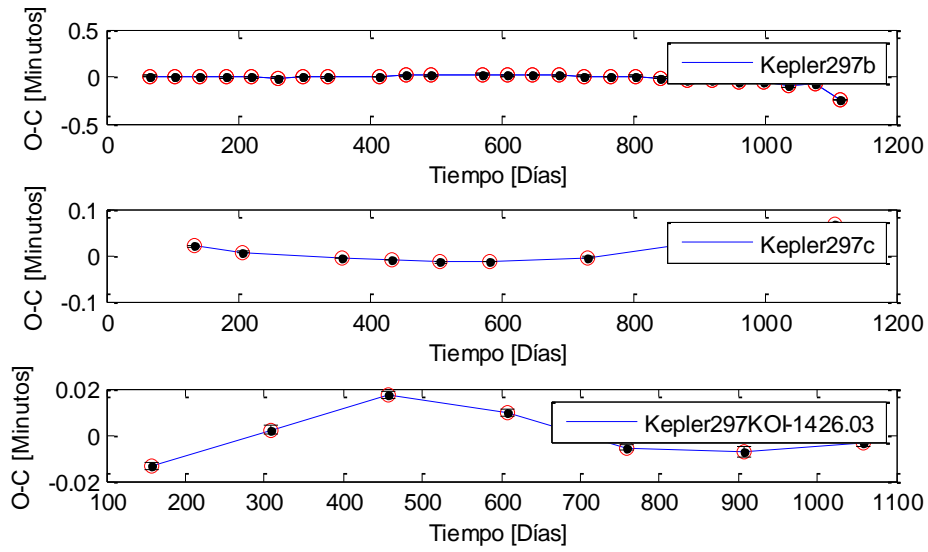


Figura A1.9 TTVs en el sistema planetario Kepler297 (Mazeh et al., 2013).

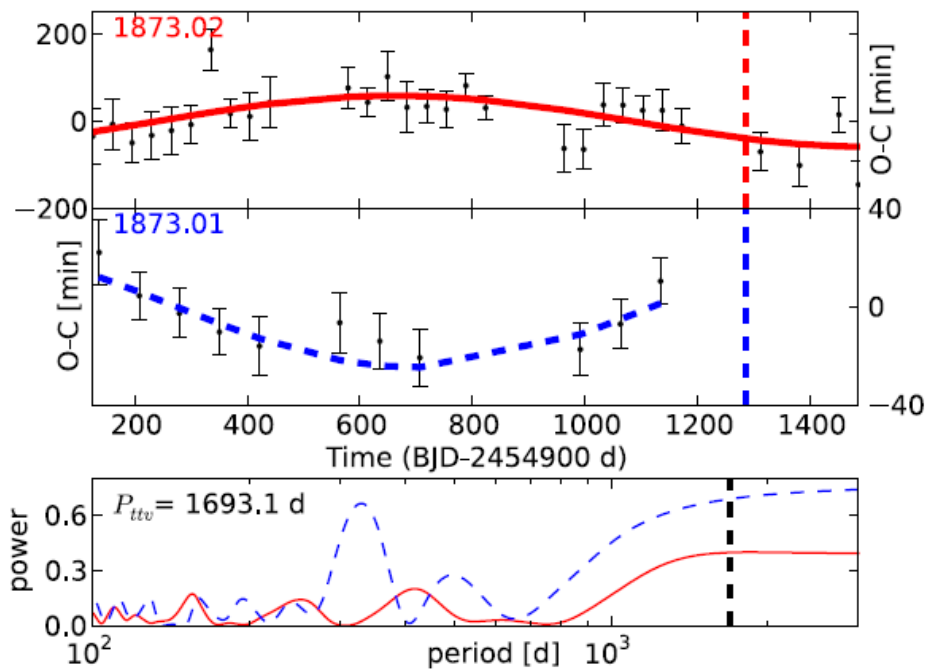


Figura A1.10 TTVs en el sistema planetario Kepler328 (Holczer et al., 2016).

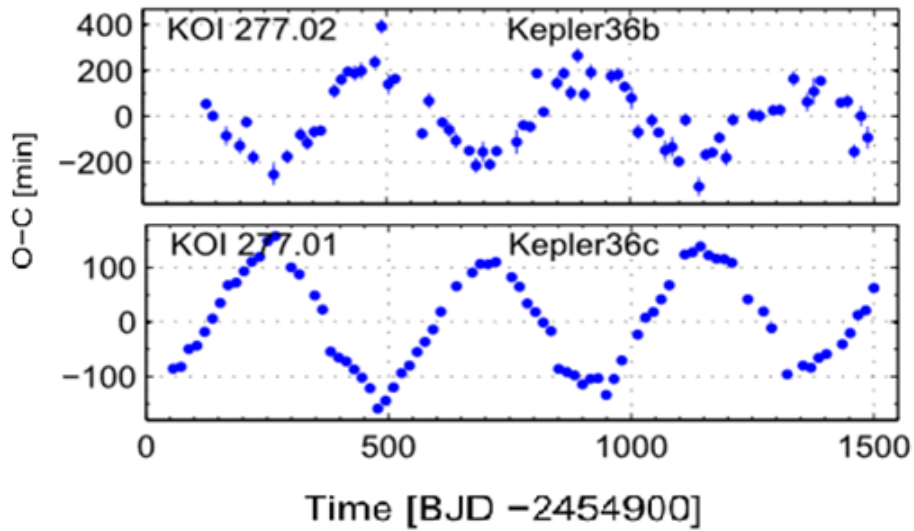


Figura AI.11 TTVs en el sistema planetario Kepler36 (Holczer et al., 2016).

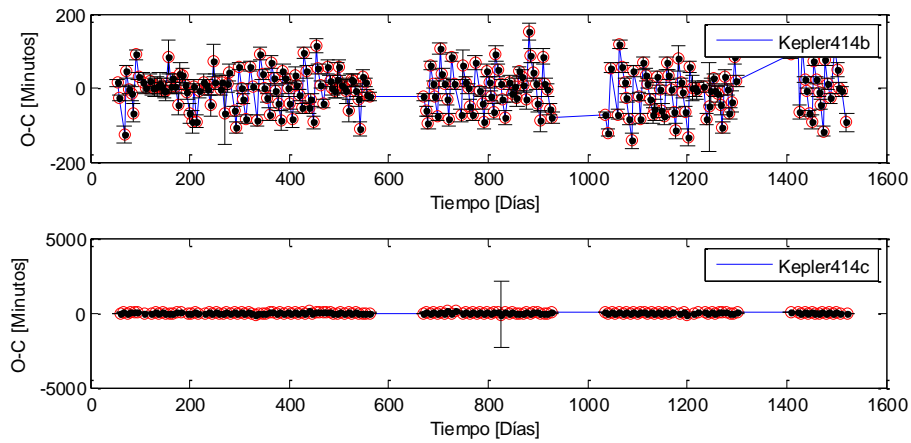


Figura AI.12a TTVs en el sistema planetario Kepler414 (Holczer et al., 2016).

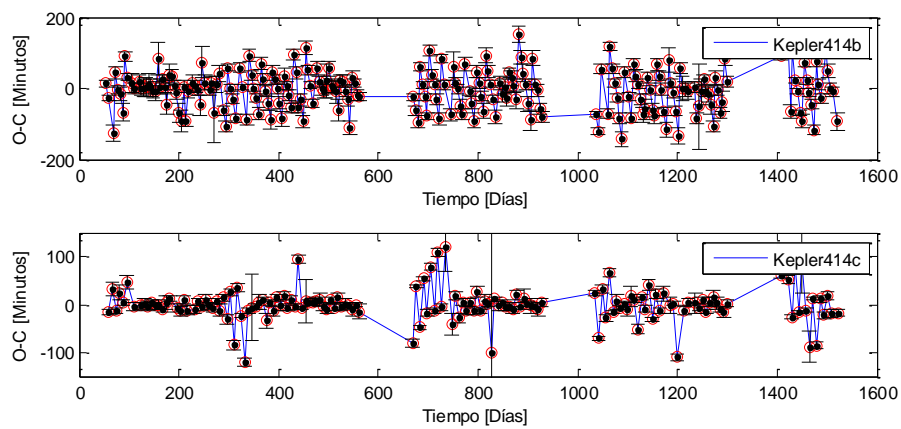


Figura AI.12b TTVs en el sistema planetario Kepler414 (Rowe et al., 2014).

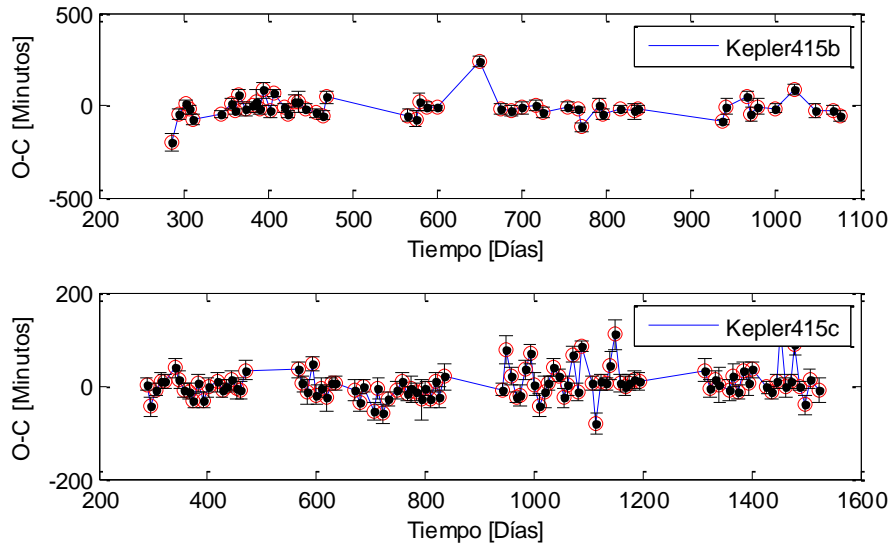


Figura A1.13 TTVs en el sistema planetario Kepler415 (Holczer et al., 2016).

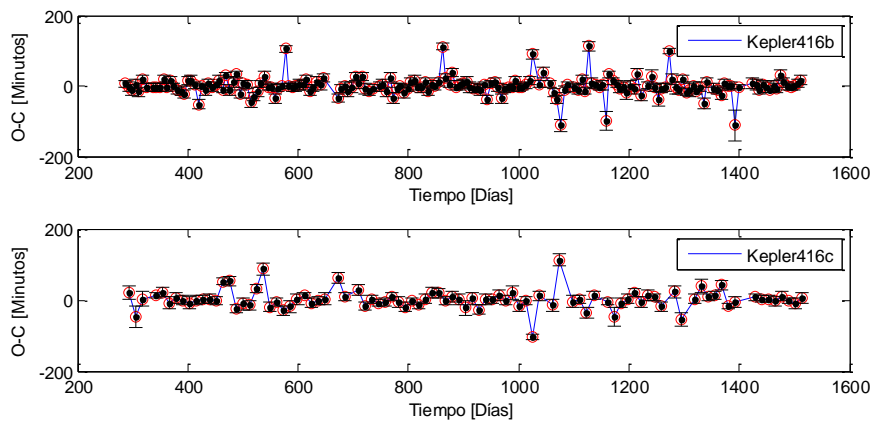


Figura A1.14 TTVs en el sistema planetario Kepler416 (Holczer et al., 2016).

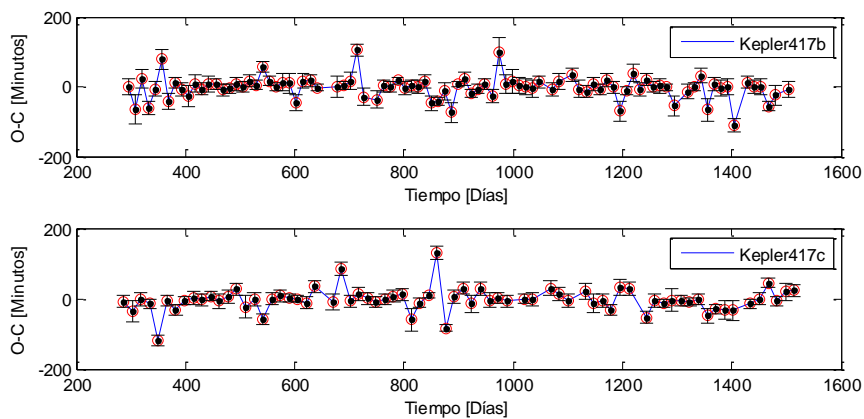


Figura A1.15 TTVs en el sistema planetario Kepler417 (Holczer et al., 2016).

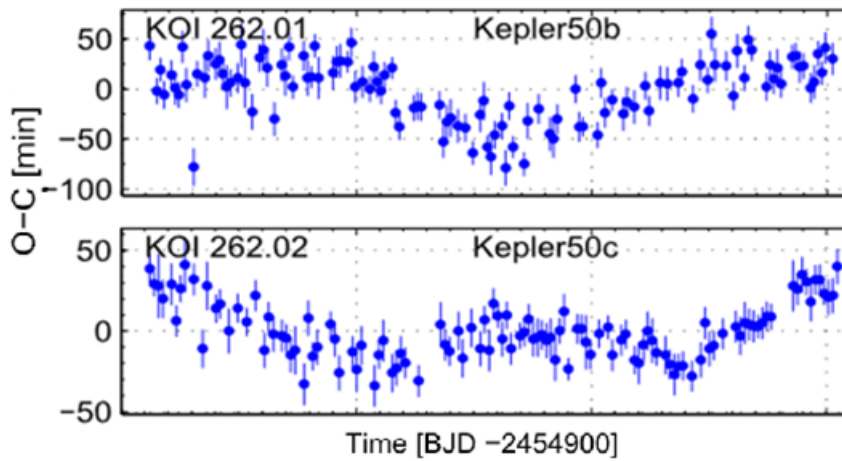


Figura A1.16 TTVs en el sistema planetario Kepler50 (Xie, 2014).

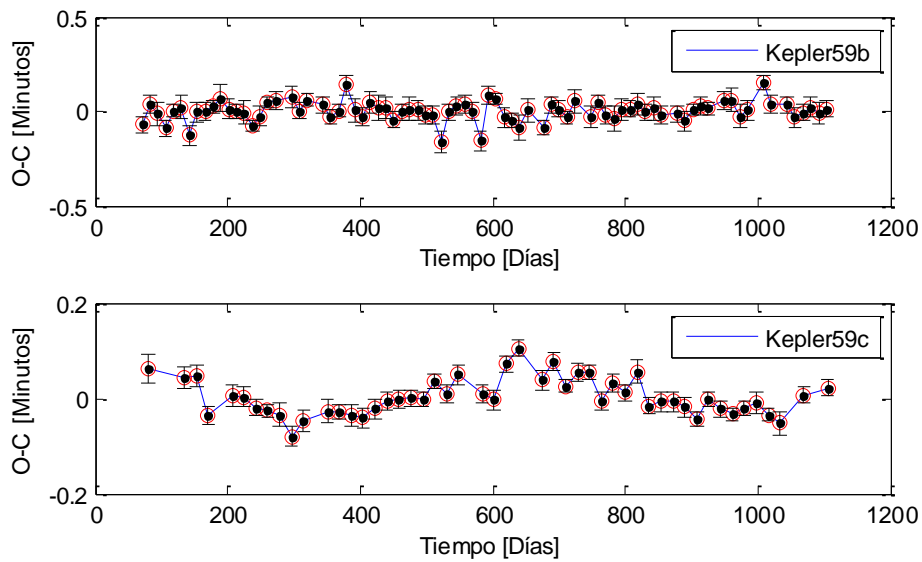


Figura A1.17 TTVs en el sistema planetario Kepler59 (Xie, 2013).

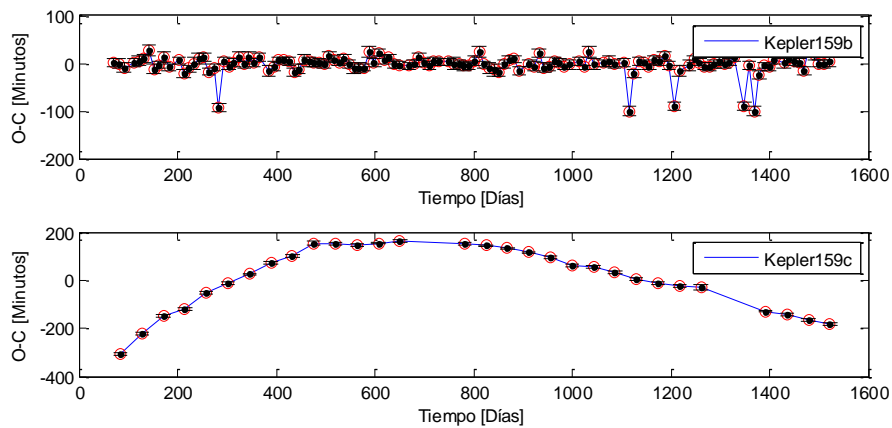


Figura A1.18 TTVs en el sistema planetario Kepler159 (Holczer et al., 2016).

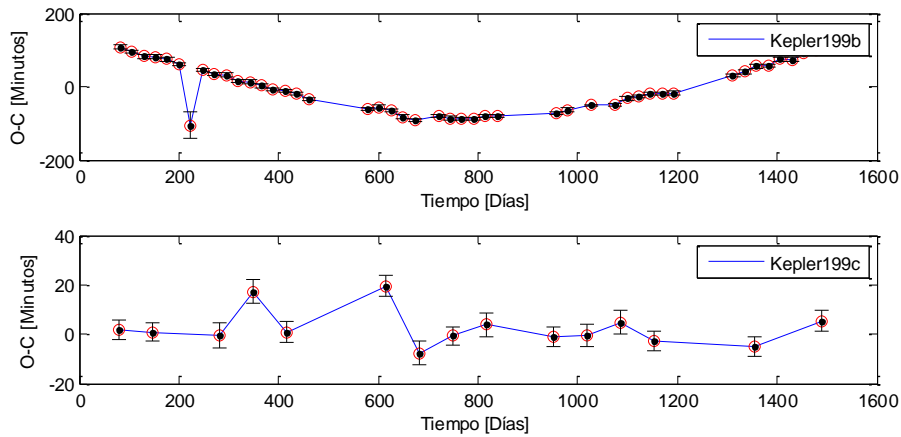


Figura A1.19 TTVs en el sistema planetario Kepler199 (Rowe et al., 2014).

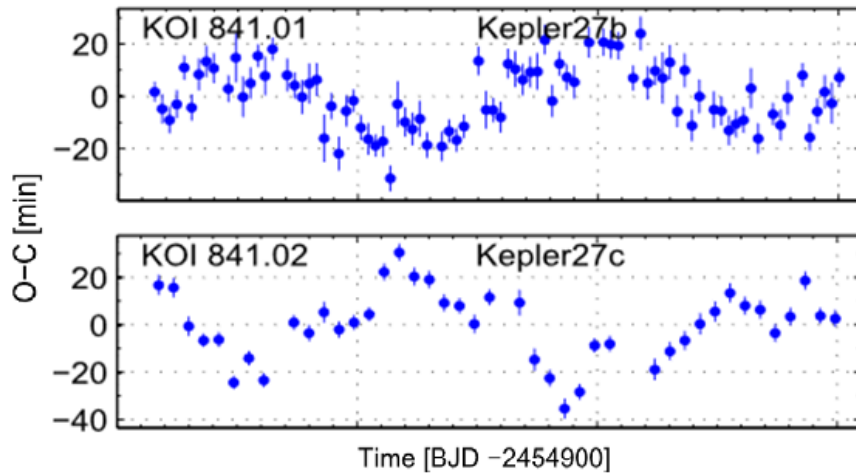


Figura A1.20 TTVs en el sistema planetario Kepler27 (Gajdoš et al., 2017).

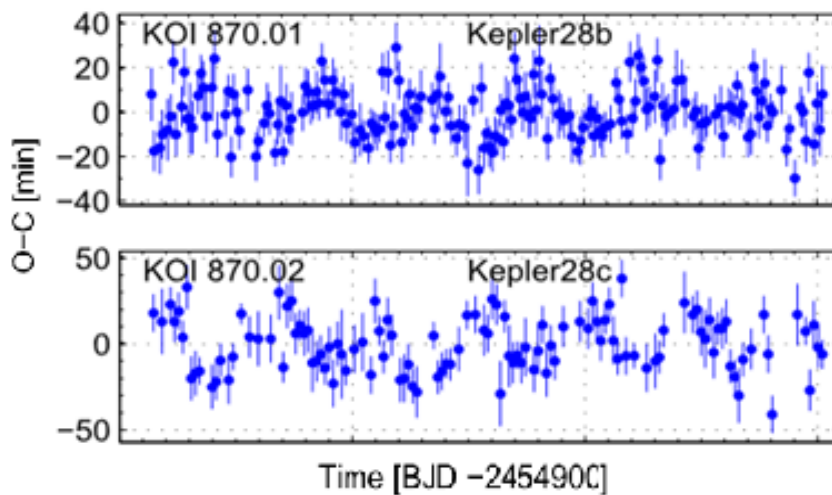


Figura A1.21 TTVs en el sistema planetario Kepler28 (Hadden & Lithwick, 2014).

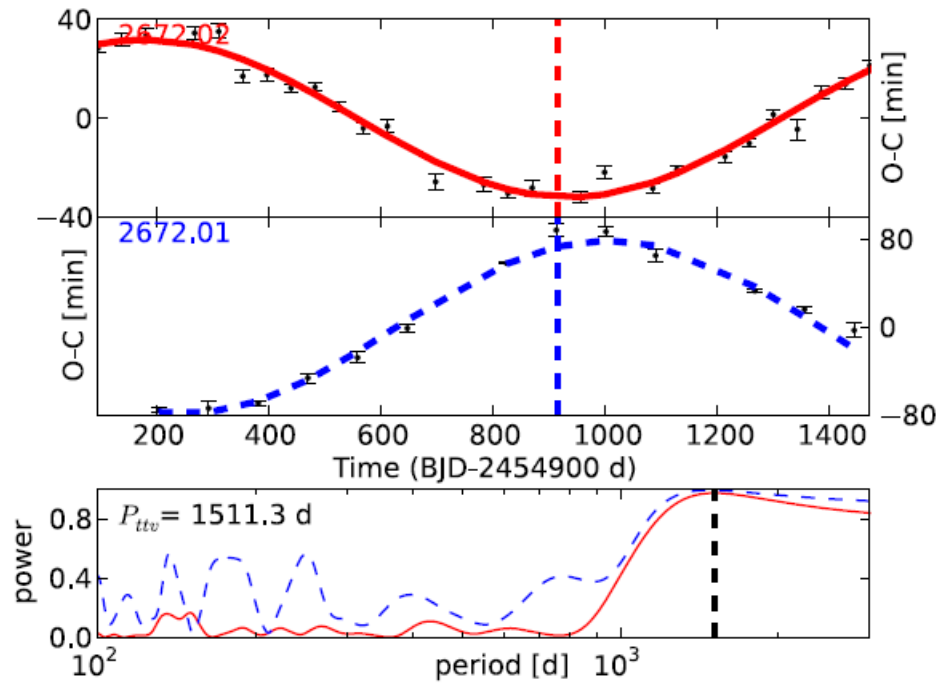


Figura A1.22 TTVs en el sistema planetario Kepler396 (Van Eylen & Albrecht, 2015).

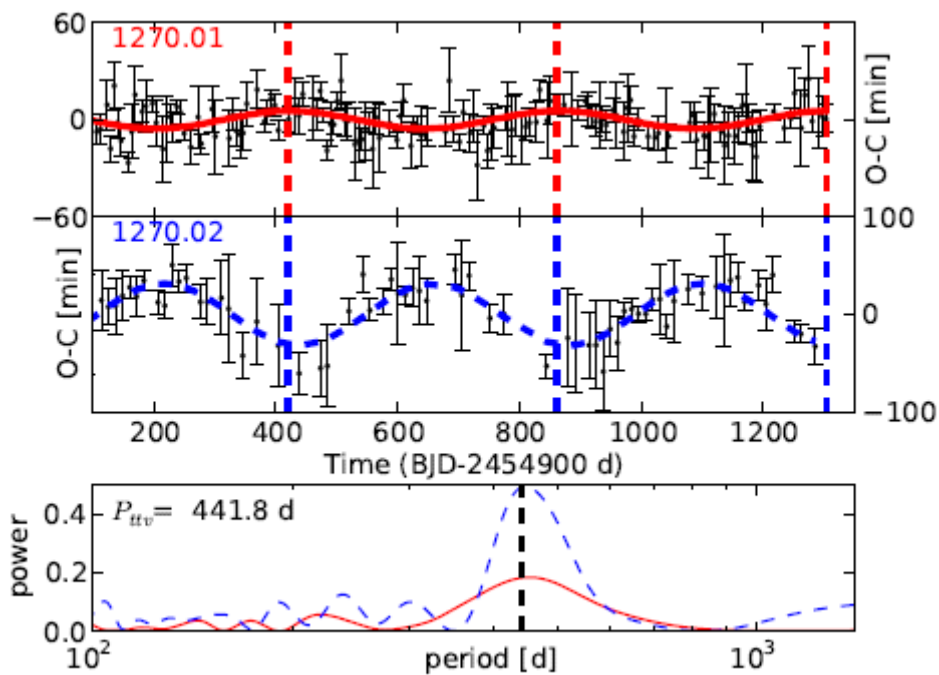


Figura A1.23 TTVs en el sistema planetario Kepler57 (Mazeh et al., 2013).

Anexo II: Códigos del repositorio TTTV_Tools

Con el fin de poder generar las diferentes gráficas expuestas a lo largo de esta memoria, así como para realizar determinados cálculos, de forma sencilla y cómoda se han implementado varias funciones y códigos en lenguaje Matlab®. El código fuente se puede consultar y descargar de su correspondiente repositorio en GitHub (Rowe et al., 2014) al que se ha denominado TTTV Tools, *Trojan Time Transit Variations Tools*.

En este anexo se expone un listado de los códigos y funciones de este repositorio y una breve descripción de cada uno.

- **TTTV_Solver.m** Esta función permite mostrar en pantalla el movimiento de un planeta a lo largo de los ejes YZ, tal como se describe en la Figura 3.1, y cuya utilidad radica en que permite calcular las TTVs que tendría un planeta, especificando como argumentos de entrada los parámetros orbitales y las masas de la estrella, el planeta y el troyano. Como argumentos de salida, da el tiempo de tránsito, y el número de órbita de cada uno, así como el valor del O-C.
- **Y1Z1_Solver.m** Esta es una función auxiliar utilizada por la, anteriormente comentada, función TTTV_Solver.m. La utilidad de esta función es la de ayudar a calcular los instantes de tiempo en los que se produce el tránsito primario.
- **TTTV_sinusoidal_fitting.m** realiza la tarea de ajuste de una señal de entrada a una señal sinusoidal, dando como argumentos de salida el periodo, la amplitud, el desplazamiento y la fase de la misma.
- **TTTV_real_fitting.m** se vale de la función TTV_sinusoidal_fitting.m para realizar un primer ajuste de una señal sinusoidal a las TTVs con los que calcula los parámetros del fundamental, y en base a los residuos de esta realizar un segundo ajuste con el fin de obtener el valor de los parámetros del segundo armónico.
- **TTTV_single.m** La utilidad de esta función radica en valerse de la función TTTV_Solver para calcular y representar gráficamente las TTVs de un planeta que tenga un troyano. Además, esta gráfica se encarga de llamar a la función TTTV_real_fitting.m, y presenta los resultados de las TTVs y el ajuste de las mismas, así como el porcentaje de correlación entre unas y otras. Un ejemplo de gráfica generada con esta función es la Figura 3.2.

- **TTTV_sweep.m** es un código que permite realizar el barrido de un parámetro para ver la dependencia de los parámetros que definen la dinámica de las TTVs respecto a este. El resultado es el de realizar varias veces lo mismo que en la función TTTV_single.m pero de forma automática. Este código se ha utilizado para la construcción de la Tabla 3.1. En la memoria hay un ejemplo de uso de esta función, en las Figuras 3.6.
- **StarMassCalculator.m** se ha utilizado para calcular las masas estelares que no habían sido publicadas hasta la fecha en base a la gravedad superficial de la estrella y su radio. Estas masas estelares se recogen en la Tabla 4.1.
- **TTTV_period_calculator_chi.m** calcula el rango de periodos de las TTVs compatibles con la presencia de un troyano a partir de las masas de la estrella y el planeta y el periodo orbital.
- **Unknown_pm_TTV_period_calc.m** es la función que se ha utilizado para calcular los rangos de los periodos de las TTVs compatibles con la presencia de un troyano para aquellos planetas de masa desconocida.
- **PlanetMassCalculator.m** es la función utilizada para calcular las masas que deberían de tener los planetas de la Tabla 4.8, para que el periodo de sus TTVs fuese compatible con la presencia de un troyano.
- **TTTV_OC2Period.m** partiendo de los datos publicados de las TTVs de cada planeta, permite encontrar periodicidades en estas TTVs, es decir, permite calcular el periodo o periodos de las señales periódicas que las constituyen.
- **TTTV_single_fit.m** es similar a la función TTTV_single.m pero permite graficar los datos simulados de TTVs sobre los datos reales y calcular los errores de ajuste.
- **TTTV_fit_chi2red** se ejecuta al final de la función TTTV_single_fit.m y se utiliza para dar una idea de la bondad del ajuste entre los datos reales de TTVs y el modelo ajustado.

Anexo III: Curvas de fase y ajuste del modelo

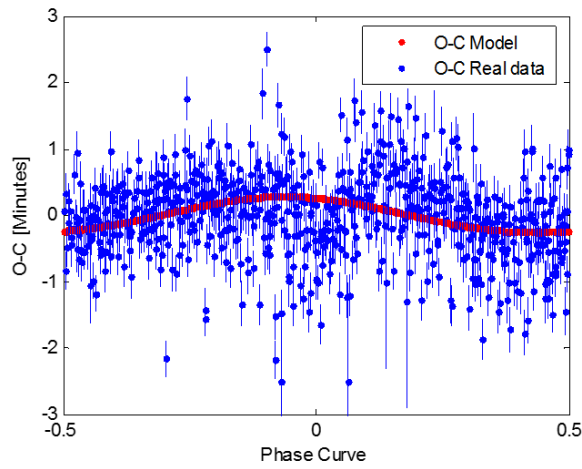


Figura AIII.1 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler17b.

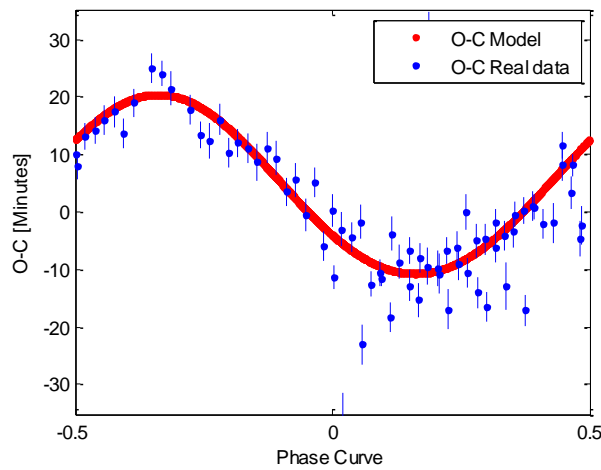


Figura AIII.2 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler410Ab.

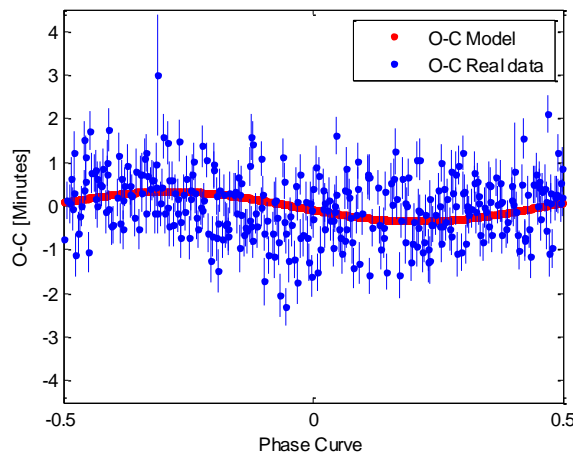


Figura AIII.3 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler71b.

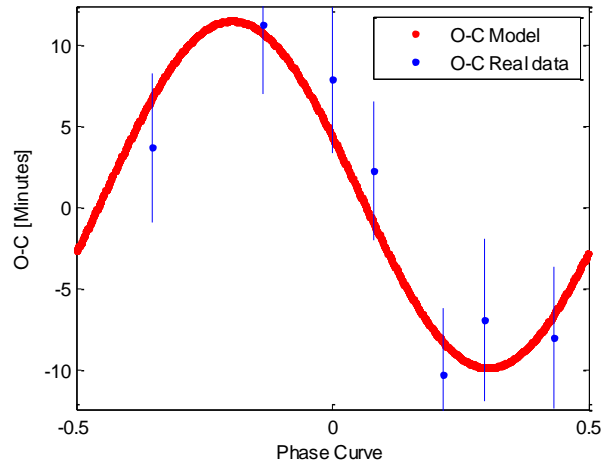


Figura AIII.4 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler108c.

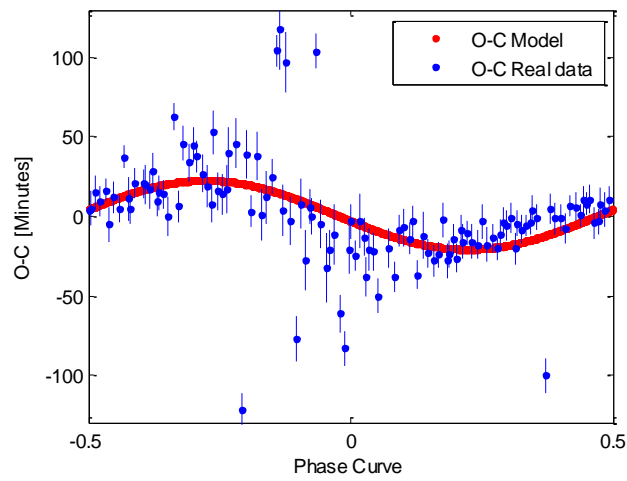


Figura AIII.5 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler136b.

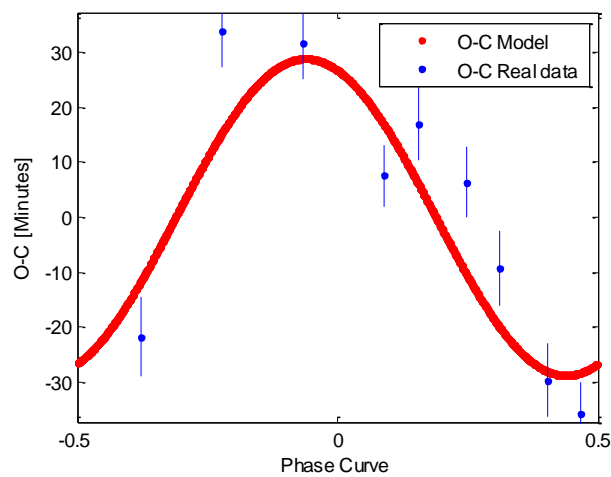


Figura AIII.6 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler139c.

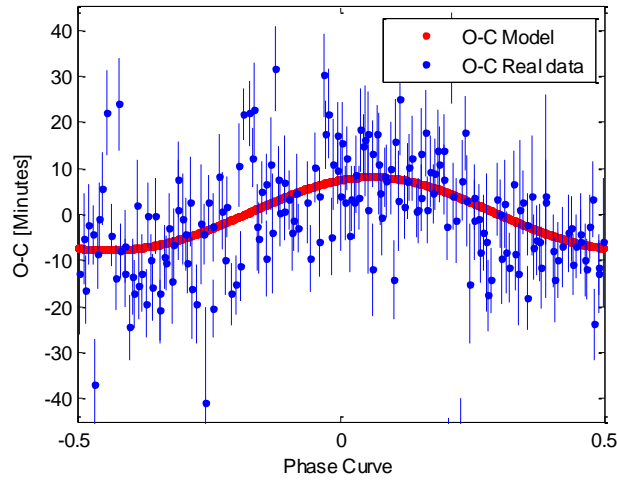


Figura AIII.7 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler161c.

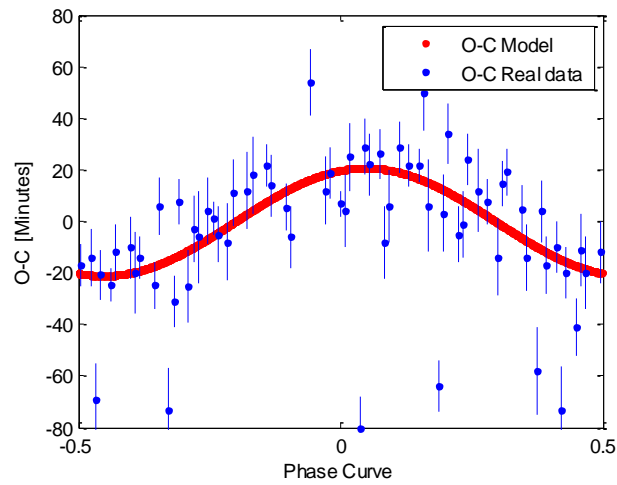


Figura AIII.8 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler231c.

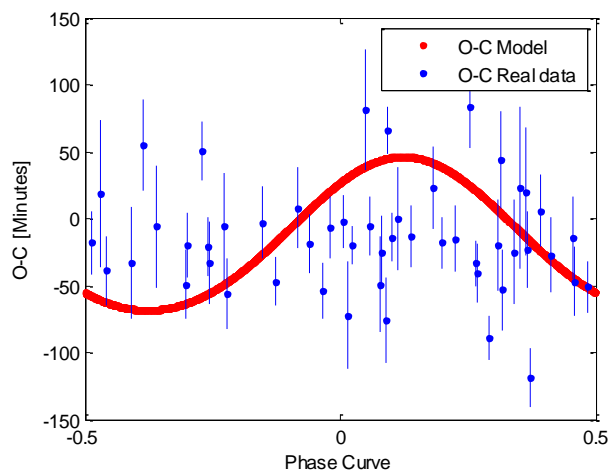


Figura AIII.9 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler415b.

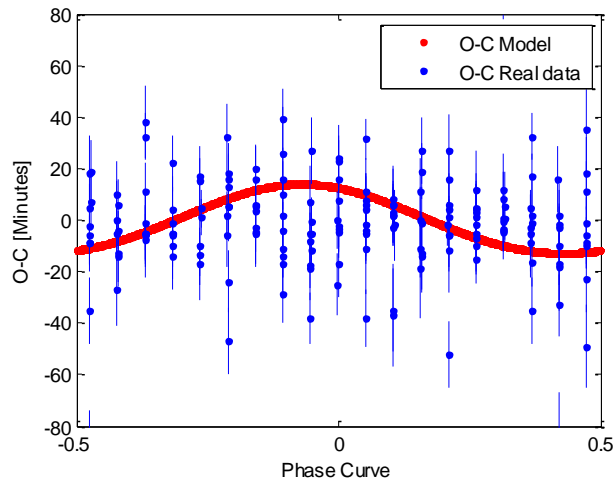


Figura AIII.10 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler416b.

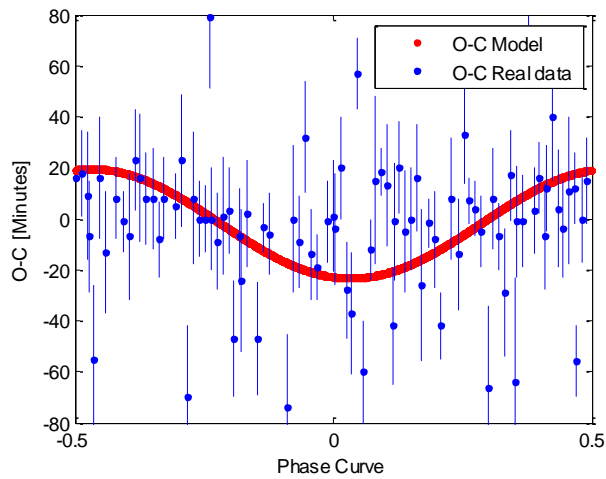


Figura AIII.11 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler417b.

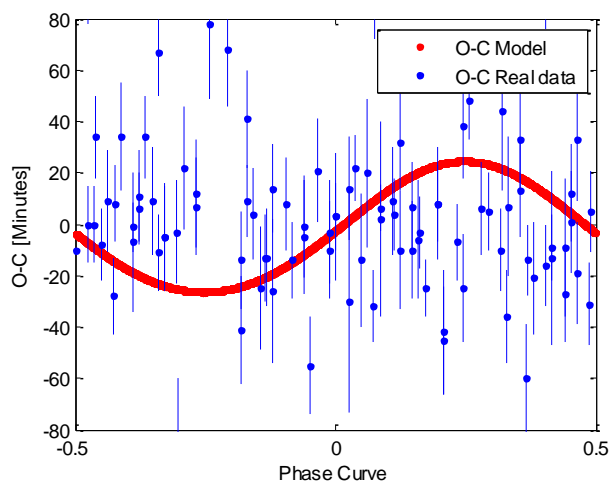


Figura AIII.12 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler415c.

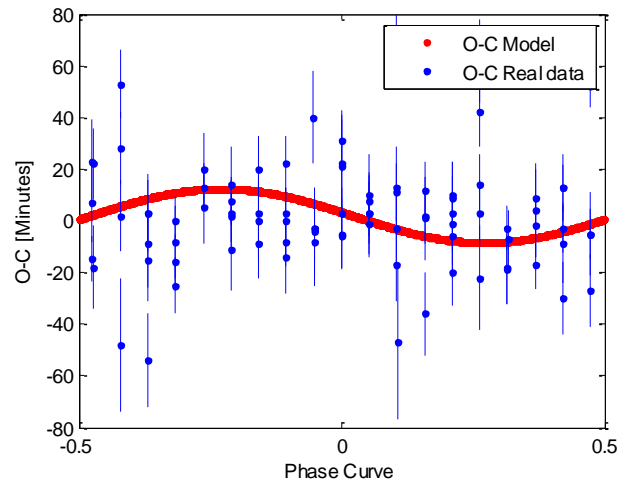


Figura AIII.13 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler416c.

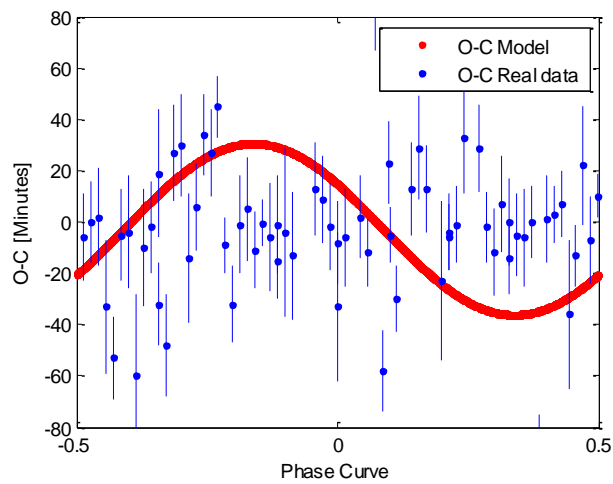


Figura AIII.14 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler417c.

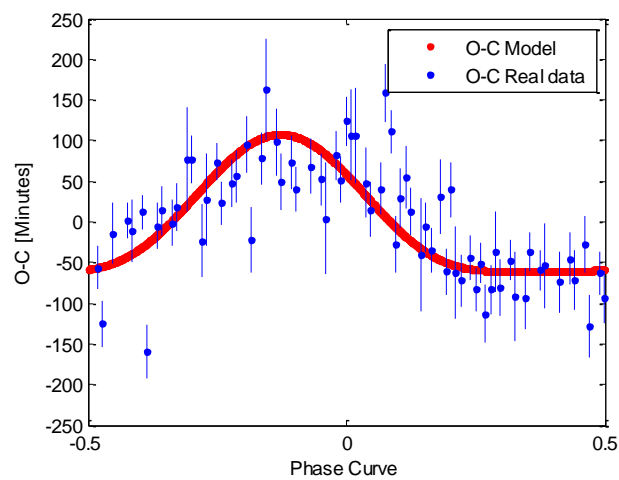


Figura AIII.15 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler59c.

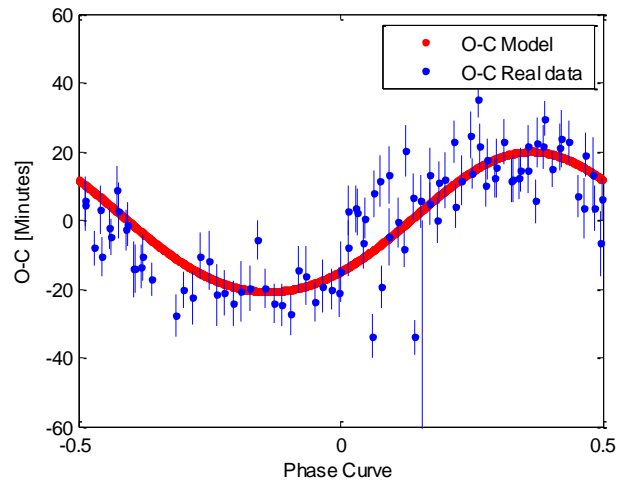


Figura AIII.16 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler160c.

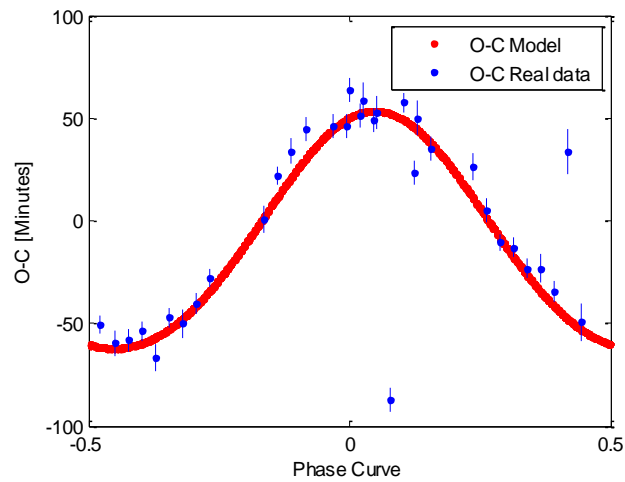


Figura AIII.17 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler230b.

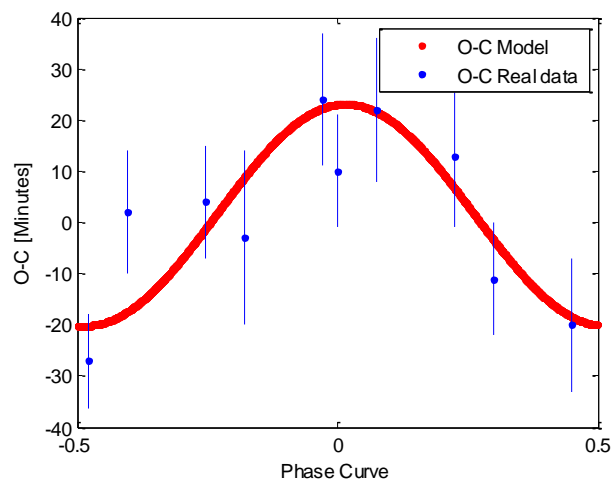


Figura AIII.18 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler309c.

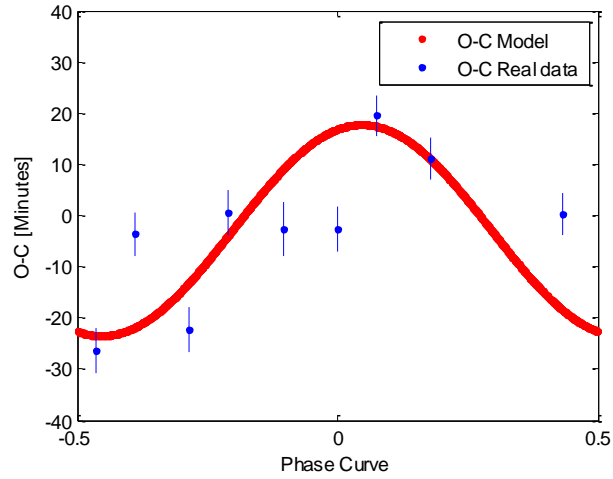


Figura AIII.19 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler397c.

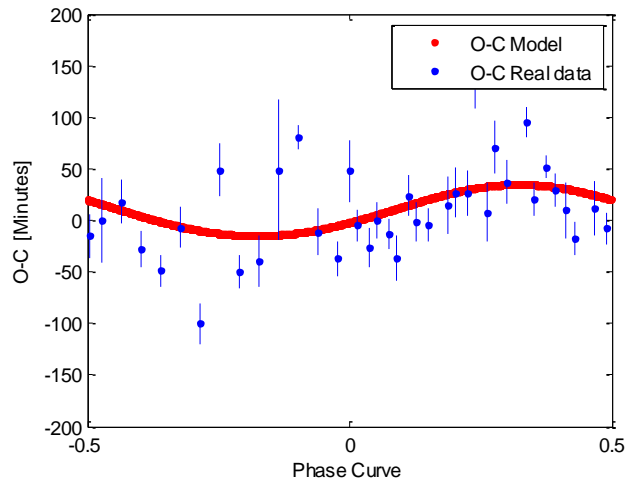


Figura AIII.20 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler405c.

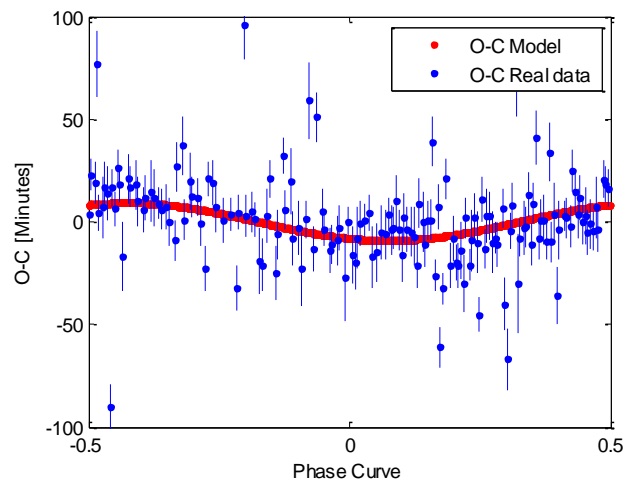


Figura AIII.21 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler195b.

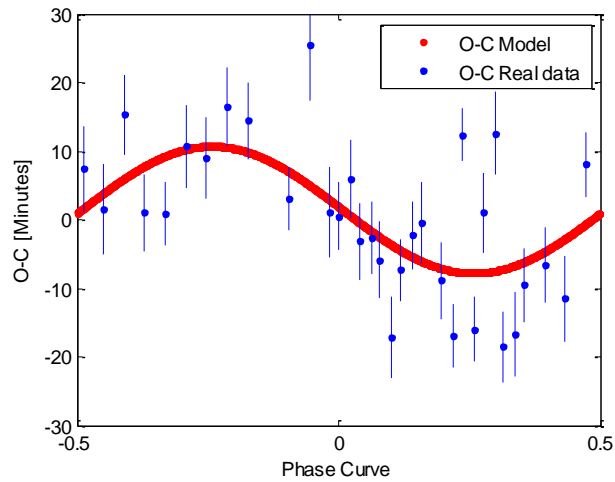


Figura AIII.22 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler209c.

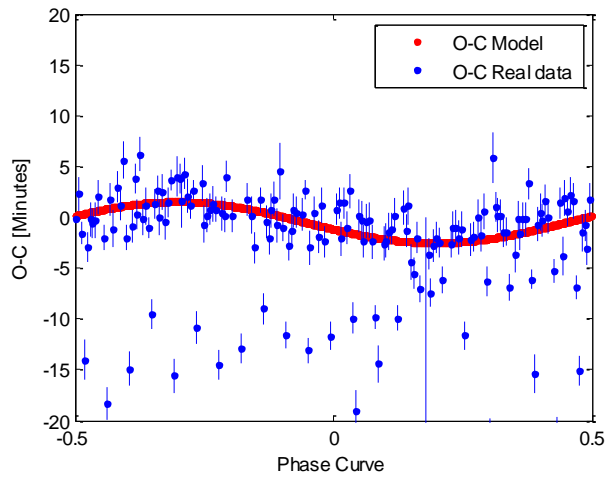


Figura AIII.23 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler210c.

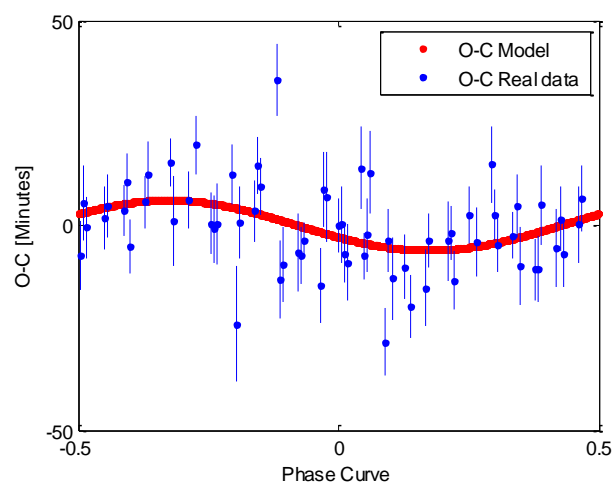


Figura AIII.24 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler312c.

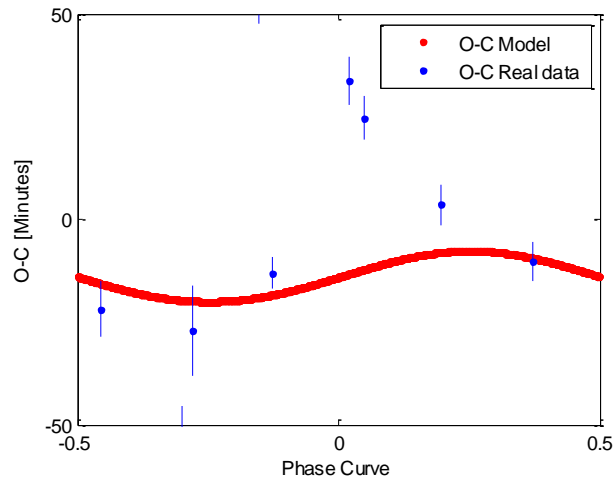


Figura AIII.25 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler159b.

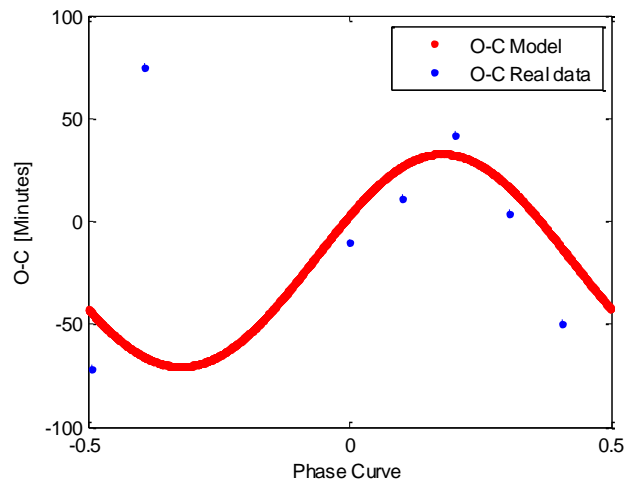


Figura AIII.26 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler111c.

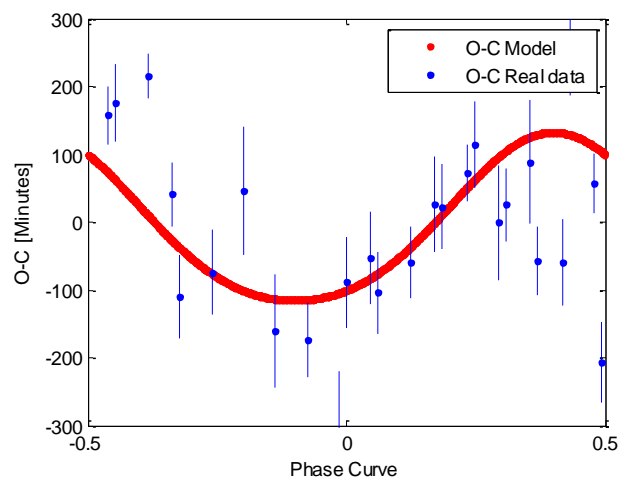


Figura AIII.27 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler278 $P_{TTV} = 829$ [días].

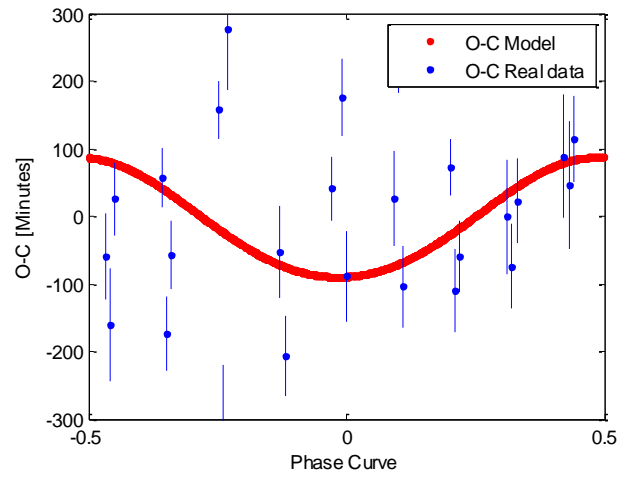


Figura AIII.28 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler278c $P_{TTV} = 464$ [días].

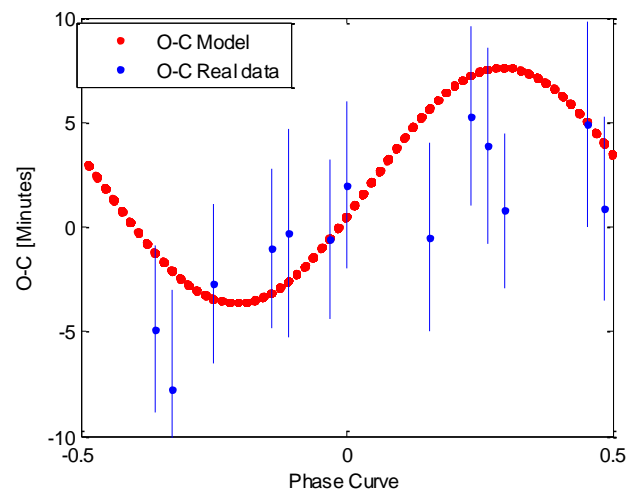


Figura AIII.29 Ajuste del modelo a la curva de fase de Kepler199c.